

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM KỸ THUẬT
THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH



HCMUTE

NGUYỄN HOÀNG PHƯƠNG

NGHIÊN CỨU CÁC PHƯƠNG PHÁP ĐA TỈ LỆ
KẾT CẤU TÂM KHÔNG ĐỒNG NHẤT

NGÀNH: CƠ KỸ THUẬT - 62520101

Hướng dẫn khoa học:

1. PGS.TS. Lê Văn Cảnh
2. GS.TS. Nguyễn Trung Kiên

Phản biện 1:

Phản biện 2:

Phản biện 3:

Hồ Chí Minh - 2021

Lời cam đoan

Tôi cam đoan đây là công trình nghiên cứu của tôi.

Các số liệu, kết quả nêu trong Luận án là trung thực và chưa từng được ai công bố trong bất kỳ công trình nào khác

TP.Hồ Chí Minh, ngày ... tháng ... năm 2021

Nghiên cứu sinh

NGUYỄN HOÀNG PHƯƠNG

Lời cảm ơn

Quá trình thực hiện luận văn là giai đoạn mà giúp chúng ta khám phá chính bản thân để tiếp cận với nguồn tri thức của khoa học. Lần đầu tiên tiếp xúc luôn gặp khó khăn và gian nan, nhưng tác giả với sự nỗ lực của bản thân và sự dìu dắt giúp đỡ của thầy hướng dẫn giúp vượt qua những trở ngại ban đầu này. Đầu tiên, em xin gửi lời tri ân sâu sắc đến thầy PGS.TS. Lê Văn Cảnh và thầy GS.TS. Nguyễn Trung Kiên. Hai thầy luôn tận tâm trong việc hướng dẫn em trong quá trình làm đề tài. Sự hỗ trợ mà em đã được tiếp nhận đó là tinh thần làm việc và kiến thức khoa học. Những kiến thức nền tảng mà em đã được tiếp thu từ hai thầy đã giúp cho em vượt qua những khó khăn khi thực hiện luận án này.

Cuối cùng, em xin gửi lời tri ân đến gia đình. Gia đình đã luôn là chỗ dựa cho em trong những lúc khó khăn về tinh thần hay cuộc sống. Tình cảm con dành cho gia đình không thể diễn tả bằng lời nhưng con sẽ viết tiếp những giấc mơ của gia đình.

TP.Hồ Chí Minh, ngày ... tháng ... năm 2021
Nghiên cứu sinh

Nguyễn Hoàng Phương

Tóm tắt

Luận án trình bày các phương pháp đa tỉ lệ cho kết cấu tấm không đồng nhất. Nội dung nghiên cứu được chia thành năm phần bao gồm phương pháp đa tỉ lệ trong miền đàn hồi cho kết cấu tấm phẳng, kết cấu ba chiều, kết cấu tấm phẳng chịu uốn và phương pháp đa tỉ lệ ngoài miền đàn hồi bao gồm vật liệu tuân theo tiêu chuẩn Hill và Tsai-wu.

Đối với nghiên cứu trong miền đàn hồi, biến dạng tại một điểm vật liệu thuộc cấp độ vĩ mô được chuyển về điều kiện biên động học cho phần tử đại diện của cấp độ vi mô. Trường chuyển vị tổng của bài toán vi mô được xấp xỉ hóa bằng phương pháp phần tử hữu hạn. Điều kiện biên tuần hoàn và tuyến tính được áp đặt thông qua mối liên hệ của chuyển vị tại các nút đối xứng và chuyển vị tại các nút góc. Phương pháp rút gọn bậc tự do được sử dụng nhằm khử đi các bậc tự do phụ thuộc trong điều kiện biên. Kỹ thuật đồng nhất hóa hay trung bình thể tích phần tử đại diện được thực hiện nhằm xác định được các thông số của ma trận hằng số vật liệu. Qua đó, các hằng số vật liệu hữu hiệu được xác định dựa trên ma trận hằng số vật liệu hữu hiệu. Các nghiên cứu được thực hiện cho kết cấu tấm phẳng với lực nằm trong mặt phẳng tấm và được khái quát cho kết cấu tấm ba chiều với phần tử đại diện ba chiều và cuối cùng là rút gọn về kết cấu tấm phẳng chịu uốn khi lực tác dụng vuông góc với mặt phẳng tấm.

Đối với nghiên cứu ngoài miền đàn hồi, bài toán phân tích giới hạn cho phần tử đại diện vi mô được thực hiện nhằm xác định được các ứng suất giới hạn tại điểm vật liệu của cấp độ vĩ mô. bài toán phân tích giới hạn được triển khai dưới dạng bài toán tối ưu hóa với hàm mục tiêu là năng lượng tiêu tán dẻo và các ràng buộc, như là điều kiện tương thích, điều kiện chuẩn hóa tổng công ngoại, điều kiện biên tuần hoàn và điều kiện trung bình hóa biến dạng cấp độ vi mô. Hàm mục tiêu, năng lượng tiêu tán dẻo, được xây dựng thông qua luật chảy dẻo kết hợp nhằm chuyển về hàm theo biến dạng. Hai tiêu chuẩn dẻo được xem xét trong nghiên cứu là tiêu chuẩn dẻo Hill (dạng tổng quát cho vật liệu dị hướng có khả năng chịu kéo khác khả năng chịu nén theo từng phương chịu lực $\Sigma_{Ytx} = \Sigma_{Yty} \neq \Sigma_{Ycx} = \Sigma_{Ycy}$) và tiêu

chuẩn Tsai-Wu (dạng tổng quát cho vật liệu có khác năng chịu kéo khác khả năng chịu nén theo mỗi phương chịu lực $\Sigma_{Ytx} \neq \Sigma_{Yty} \neq \Sigma_{Ycx} \neq \Sigma_{Ycy}$). Miền cường độ, miền ứng suất giới hạn, được xác định thông qua tập hợp các nghiệm của bài toán phân tích giới hạn cấp độ vi mô ứng với mỗi trường hợp ứng suất. Các hệ số của hàm tiêu chuẩn dẻo hữu hiệu dạng tiêu chuẩn dẻo Hill và Tsai-Wu được ước lượng thông qua kỹ thuật bình phương cực tiểu.

Abstract

This thesis presents the multiscale methods for unhomogenized plate. The thesis's content is divided into five sections that include the multiscale modelling in elastic for the flat plate, three dimension Plate, bending plate and the multiscale modelling in inelastic for the materials, which has yield function in the form of Hill's criterion or Tsai-Wu's criterion.

For elastic multiscale modelling, the strain at a point of macro scale can be transferred to be the kinematic boundary conditions in Representative volume element of micro scale problem. The total displacement in micro scale is discretized by finite element method. The periodic boundary condition and linear boundary condition are applied in the relationship between the displacement at two symmetric edge and the displacement at the corners. The condensation technique is used to eliminate the independent freedom in this condition. The homogenization method or average volume representation is implemented to determine the parameters of the material constant matrix. Thereby, the effective material constants are determined from the effective material constant matrix. Three types in RVE problems is done for the flat plate, three-dimension plate and the bending plate.

For inelastic multiscale modelling, limit analysis for micro representative volume Element is performed to determine limited stresses at a material point of the macro level. The limited analysis is implemented as an optimization algorithm with a objective function, the dissipation energy, and constraints such as total external work, compatibility, periodic condition on boundary and the average strain over all micro level. The objective, the dissipation energy, is established by applying the flow rule to transfer into the function of strain. There are two criterion such as Hill's criterion (the general formulation for anisotropic materials, which tensile strength is different from compressible strength on a direction $\Sigma_{Ytx} = \Sigma_{Yty} \neq \Sigma_{Ycx} = \Sigma_{Ycy}$) and Tsai-Wu's criterion (the general formulation for anisotropic materials, which tensile strength is different from compressible strength on each direction $\Sigma_{Ytx} \neq \Sigma_{Yty} \neq \Sigma_{Ycx} \neq \Sigma_{Ycy}$). The domain of strength, a set of limited stress cases, is

defined as a set of solutions from micro optimized problems with spectacular stress case.

Mục lục

Lời cam đoan	i
Lời cảm ơn	ii
Tóm tắt	iv
Mục lục	xi
Danh mục bảng	xiii
Danh mục hình ảnh	xviii
Danh mục viết tắt	xix
1 Tổng quan	1
1.1 Giới thiệu	1
1.2 Tổng quan các hướng nghiên cứu	2
1.2.1 Phương pháp đa tỉ lệ trong miền đàn hồi	2
1.2.2 Phương pháp đa tỉ lệ ngoài miền đàn hồi	5
1.3 Mục tiêu và phạm vi của luận án	7
1.3.1 Mục tiêu luận án	7
1.3.2 Phạm vi nghiên cứu	8
1.4 Cấu trúc luận án	9
2 Lý thuyết nền tảng	11

2.1	Mô hình vật liệu	11
2.1.1	Mô hình vật liệu cứng dẻo lý tưởng	12
2.1.2	Mô hình vật liệu đàn dẻo lý tưởng	12
2.1.3	Tiêu chuẩn chảy dẻo	13
2.2	Lý thuyết đa tỉ lệ	18
2.2.1	Phần tử đơn vị thể tích đại diện RVE	19
2.2.2	Định lý trung bình thể tích	20
2.3	Lý thuyết phân tích giới hạn	20
2.3.1	Hàm năng lượng tiêu tán dẻo của vật liệu	23
2.3.2	Định nghĩa bài toán tối ưu hóa hình nón bậc hai (SOCP)	25
2.4	Lý thuyết tấm	27
2.4.1	Tấm mỏng Kirchoff chịu uốn	27
2.4.2	Phần tử tấm chịu uốn Hsieh-Clough-Tocher	28
3	Bài toán đa tỉ lệ đàn hồi với phần tử đại diện tấm phẳng hai chiều	31
3.1	Giới thiệu	31
3.2	Điều kiện biên trong bài toán tấm phẳng vi mô đàn hồi	32
3.3	Kỹ thuật đồng nhất hoá bài toán tấm phẳng vi mô	34
3.4	Mô đun đàn hồi hữu hiệu của tấm phẳng vi mô	35
3.5	Các mode chuyển vị của bài toán tấm phẳng	37
3.6	Ví dụ số tấm phẳng vi mô	38
3.6.1	Vật liệu có cốt sợi hình chữ nhật	38
3.6.2	Vật liệu có cốt sợi hình tròn	45
3.6.3	Vật liệu có lỗ rỗng	50
3.6.4	Vật liệu có cơ tính biến thiên	54
3.6.5	Vật liệu đa tinh thể dị hướng	59
3.7	Kết luận bài toán tấm phẳng vi mô trong miền đàn hồi	62

4	Bài toán đa tỉ lệ đàn hồi với phần tử đại diện 3D	64
4.1	Giới thiệu	64
4.2	Phần tử đại diện không gian 3D	65
4.3	Điều kiện biên bài toán phần tử đại diện 3D	65
4.4	Các dạng chuyển vị của RVE 3D	66
4.5	Ví dụ số	67
4.5.1	Vật liệu đứng, ngang và xen kẽ	67
4.5.2	Kết cấu tấm chịu uốn nhiều lớp	71
4.5.3	Kết cấu tấm 3D chịu uốn có cơ lý biến thiên	74
4.6	Kết luận bài toán đa tỉ lệ đàn hồi với phần tử đại diện 3D	76
5	Bài toán đa tỉ lệ đàn hồi với phần tử tấm vi mô chịu uốn	78
5.1	Giới thiệu	78
5.2	Phần tử đại diện kết cấu tấm chịu uốn	79
5.3	Điều kiện biên của bài toán tấm vi mô chịu uốn	80
5.4	Kỹ thuật đồng nhất hoá kết cấu tấm vi mô chịu uốn	82
5.5	Các dạng chuyển vị của tấm vi mô chịu uốn	83
5.6	Ví dụ số tấm mỏng vi mô chịu uốn	84
5.6.1	Tấm có lỗ hình vuông	84
5.6.2	Tấm có nhiều lớp có lỗ tròn	86
5.7	Kết luận tấm mỏng vi mô chịu uốn trong miền đàn hồi	93
6	Miền cường độ hữu hiệu cho vật liệu theo tiêu chuẩn Hill	94
6.1	Giới thiệu	94
6.2	Vật liệu theo tiêu chuẩn Hill	96
6.3	Phân tích giới hạn động học cho vật liệu tiêu chuẩn Hill	97
6.4	Khai triển bài toán tiêu chuẩn Hill về dạng nón bậc hai	98
6.5	Ví dụ số	99

6.5.1	Thiết kế dẻ cho tấm có lỗ chịu kéo nén	99
6.5.2	Thiết kế dẻ cho tấm kim loại gia cường cốt sợi	104
6.5.3	Thiết kế dẻ cho vật liệu có hai lỗ	106
6.5.4	Thiết kế dẻ cho tấm có nhiều lỗ chịu kéo nén	108
6.6	Kết luận thiết kế dẻ vật liệu theo tiêu chuẩn Hill	111
7	Miền cường độ hữu hiệu cho vật liệu theo tiêu chuẩn Tsai-Wu	112
7.1	Giới thiệu	112
7.2	Vật liệu theo tiêu chuẩn TSai-Wu	114
7.2.1	Tiêu chuẩn dẻ TSai-Wu	114
7.2.2	Hàm năng lượng tiêu tán theo tiêu chuẩn Tsai-Wu	115
7.3	Phân tích giới hạn kết cấu vi mô tiêu chuẩn Tsai-Wu	116
7.4	Khai triển bài toán tối ưu hoá ràng buộc nón	117
7.5	Ví dụ số	118
7.5.1	Hỗn hợp gia cường cốt sợi tròn	119
7.5.2	Vật liệu có lỗ rỗng tròn	123
7.5.3	Vật liệu lỗ rỗng ngẫu nhiên	127
7.6	Kết luận thiết kế dẻ cho vật liệu theo tiêu chuẩn Tsai-Wu	130
8	Thảo luận	132
8.1	Bài toán đa tỉ lệ đàn hồi cho kết cấu tấm phẳng hai chiều	132
8.1.1	Ưu điểm của phương pháp đa tỉ lệ tấm phẳng đàn hồi	133
8.1.2	Hạn chế của phương pháp đa tỉ lệ tấm phẳng đàn hồi	133
8.2	Bài toán đa tỉ lệ đàn hồi cho kết cấu 3D	133
8.2.1	Ưu điểm của phương pháp đa tỉ lệ kết cấu 3D	134
8.2.2	Hạn chế của phương pháp đa tỉ lệ kết cấu 3D	135
8.3	Bài toán đa tỉ lệ đàn hồi cho kết cấu tấm chịu uốn	135
8.3.1	Ưu điểm của phương pháp đa tỉ lệ kết cấu tấm chịu uốn	136

8.3.2	Hạn chế của phương pháp đa tỉ lệ kết cấu tấm chịu uốn . . .	136
8.4	Miền cường độ hữu hiệu cho vật liệu tiêu chuẩn Hill	136
8.4.1	Ưu điểm thiết kế dẻo cho vật liệu tiêu chuẩn Hill	137
8.4.2	Hạn chế của thiết kế dẻo cho vật liệu tiêu chuẩn Hill	137
8.5	Miền cường độ hữu hiệu cho vật liệu tiêu chuẩn Tsai-Wu	138
8.5.1	Ưu điểm của thiết kế dẻo cho vật liệu tiêu chuẩn Tsai-Wu . .	138
8.5.2	Hạn chế của thiết kế dẻo cho vật liệu tiêu chuẩn Tsai-Wu . .	139
9	Kết luận và kiến nghị	140
9.1	Kết luận	140
9.2	Kiến nghị	141
9.2.1	Phương pháp đa tỉ lệ cho bài toán đàn hồi	141
9.2.2	Phương pháp đa tỉ lệ cho bài toán thiết kế dẻo	142

Danh sách bảng

3.1	Thông số mô đun đàn hồi hữu hiệu cho vật liệu cốt sợi ngắn.	39
3.2	Thông số mô đun đàn hồi hữu hiệu cho vật liệu cốt sợi dài.	39
3.3	Bảng thông số vật liệu hữu hiệu của mô hình cốt sợi ngắn.	43
3.4	Bảng thông số vật liệu hữu hiệu của mô hình cốt sợi dài.	43
3.5	Ứng suất tại điểm mép lỗ tròn trong bài toán cấp độ vĩ mô.	45
3.6	Ma trận hằng số vật liệu hữu hiệu của vật liệu cốt sợi tròn.	48
3.7	Các hằng số vật liệu hữu hiệu của vật liệu cốt sợi gia cường hình tròn.	48
3.8	Ảnh hưởng của lỗ rỗng đến ma trận hằng số vật liệu.	51
3.9	Các hằng số đàn hồi hữu hiệu của tấm phẳng có lỗ tròn.	52
3.10	Mô đun đàn hồi hữu hiệu của vật liệu cơ lý biến thiên A và B.	56
3.11	Các thông số đàn hồi hữu hiệu của đa tinh thể nhôm.	61
4.1	Ma trận hằng số vật liệu của RVE 3D vật liệu phân bố lớp ngang.	69
4.2	Ma trận hằng số vật liệu của RVE 3D vật liệu phân bố lớp đứng.	69
4.3	Ma trận hằng số vật liệu của RVE 3D vật liệu phân bố xen kẽ.	69
4.4	Ma trận hằng số vật liệu của RVE tấm hướng sợi chữ thập (cross ply)	72
4.5	Ma trận hằng số vật liệu của RVE tấm hướng sợi xiên (angle ply)	73
4.6	Đặc trưng vật liệu kim loại(Al_2O_3) và gốm (ZrO_2)	74
4.7	Ma trận hằng số vật liệu hữu hiệu của mẫu FGM một lớp và ba lớp.	76
5.1	Hằng số vật liệu hữu hiệu của RPE khi thể tích lỗ thay đổi.	85
5.2	Phương trình hằng số vật liệu hữu hiệu của tấm lỗ chữ nhật.	85
5.3	Độ võng không thứ nguyên của tấm vĩ mô với biên tựa chu vi.	90

5.4	Độ võng không thứ nguyên tại tâm tấm với điều kiện biên tựa. . . .	91
5.5	Độ võng chuẩn hóa tại tâm tấm lỗ tròn tuần hoàn theo hai phương pháp.	91
6.1	Thời gian tính toán của phương pháp đề xuất.	102

Danh sách hình vẽ

2.1	Mối liên hệ ứng suất và biến dạng của vật liệu dẻo và vật liệu giòn.	11
2.2	Mối liên hệ ứng suất và biến dạng trong mô hình cứng dẻo lý tưởng	12
2.3	Mối liên hệ ứng suất và biến dạng trong mô hình đàn dẻo lý tưởng	12
2.4	Ứng xử tăng tải ổn định và không ổn định theo Drucker.	14
2.5	Hình học của luật chảy dẻo kết hợp.	14
2.6	Các tiêu chuẩn dẻo cho vật liệu dẻo và vật liệu giòn.	15
2.7	Mối liên hệ giữa bài toán cấp độ vi mô và bài toán cấp độ vĩ mô. .	19
2.8	Nghiệm cận trên và cận dưới trong bài toán phân tích giới hạn. . .	21
2.9	Kết cấu tấm mỏng Kirchoff chịu uốn.	27
2.10	Qui ước dấu ứng suất trong tấm.	28
2.11	Phần tử tương thích C^1 HCT với 12 bậc tự do	29
3.1	Các nút trên biên phần tử đại diện	33
3.2	Các mode chuyển vị tấm phẳng với các biến dạng từ cấp độ vĩ mô.	37
3.3	Mẫu RVE vật liệu gia cường cốt sợi ngắn và cốt sợi dài.	39
3.4	Lưới phần tử hữu hạn T3 và Q4 của vật liệu cốt sợi ngắn và cốt sợi dài.	40
3.5	Ứng suất RVE cốt sợi ngắn với điều kiện biên tuần hoàn.	41
3.6	Ứng suất RVE cốt sợi ngắn với điều kiện biên tuyến tính.	41
3.7	Ứng suất RVE cốt sợi dài với điều kiện biên tuần hoàn.	42
3.8	Ứng suất RVE cốt sợi dài với điều kiện biên tuyến tính.	42
3.9	Lưới phần tử của bài toán cấp độ vĩ mô: tấm có lỗ tròn	44

3.10	Ứng suất của tấm vĩ mô có lỗ tròn cho vật liệu cốt sợi ngắn.	44
3.11	Ứng suất của tấm vĩ mô có lỗ tròn cho vật liệu cốt sợi dài.	45
3.12	Lưới phần tử T3 cho bài toán RVE vật liệu cốt sợi tròn.	46
3.13	Ứng suất RVE sợi tròn với phần tử T3 với biên tuần hoàn ($V_f = 0.1$)	46
3.14	Ứng suất RVE sợi tròn với phần tử ES-T3 với biên tuần hoàn ($V_f = 0.1$)	47
3.15	Ứng suất RVE sợi tròn với phần tử T3 với biên tuyến tính ($V_f = 0.1$)	47
3.16	Ứng suất RVE sợi tròn với phần tử ES-T3 với biên tuyến tính ($V_f = 0.1$)	47
3.17	Mô đun kháng cắt G_{eff} của phần tử RVE với hai điều kiện biên	49
3.18	Hệ lưới phần tử T3 của RVE với thể tích lỗ rỗng khác nhau	50
3.19	Chuyển vị và ứng suất của RVE biên tuyến tính với $V_f = 0.1$	52
3.20	Chuyển vị và ứng suất của RVE biên tuần hoàn với $V_f = 0.1$	53
3.21	Các thông số đàn hồi hữu hiệu của vật liệu có lỗ rỗng tròn.	53
3.22	Mô hình hai vật liệu cơ lý biến thiên FGM: A và B	55
3.23	Phân bố các thông số của ma trận hằng số vật liệu mẫu A.	56
3.24	Phân bố các thông số của ma trận hằng số vật liệu mẫu B.	56
3.25	Phân bố thông số vật liệu hữu hiệu của mẫu A.	57
3.26	Phân bố thông số vật liệu hữu hiệu của mẫu B.	58
3.27	Phân bố hướng ngẫu nhiên của vật liệu đa tinh thể $[0;90]$	60
3.28	Phân bố của mô đun đàn hồi trượt hữu hiệu của đa tinh thể nhôm (Al).	61
3.29	Mô đun đàn hồi kháng trượt hữu hiệu của đa tinh thể nhôm dị hướng.	62
4.1	Phương pháp đa tỉ lệ với phần tử đại diện 3D	65
4.2	Chuyển vị tương ứng RVE 3D với các mode biến dạng từ cấp độ vĩ mô	66
4.3	Chuyển vị tương ứng của phần tử đại diện của tấm 3D chịu uốn	67
4.4	Lưới phần tử đại diện 3D phân bố vật liệu ngang.	68
4.5	Lưới phần tử đại diện 3D phân bố vật liệu đứng	70
4.6	Lưới phần tử đại diện 3D phân bố vật liệu xen kẽ	70
4.7	Mô đun đàn hồi dọc trục D_{11} hữu hiệu khi bề dày mỗi lớp giảm dần.	71

4.8	Mô đun đàn hồi khối hữu hiệu K_{eff} khi bề dày mỗi lớp giảm dần.	71
4.9	Hệ lưới phần tử $12 \times 12 \times 12$ H8 của tấm laminate 4 lớp.	72
4.10	Hệ lưới phần tử của phần tử đại diện 3D của vật liệu A.	75
4.11	Hệ lưới phần tử của phần tử đại diện 3D của vật liệu B.	75
4.12	Thống kê mô đun chịu kéo D_{11} trên mẫu đại diện 3D của tấm FGM.	75
5.1	Đồng nhất hóa tấm mỏng chịu uốn	79
5.2	Chuyển vị của phần tử tấm đại diện tương ứng với biến dạng cong từ cấp độ vĩ mô.	83
5.3	Bài toán tấm vi mô chịu uốn khoét lỗ hình vuông và hệ lưới phần tử.	84
5.4	Chuyển vị của tấm vi mô RPE lỗ hình vuông với biến dạng vĩ mô.	85
5.5	Ảnh hưởng lỗ rỗng đến mô đun E_{eff} và ν_{eff} của vật liệu khoét lỗ.	86
5.6	Ảnh hưởng lỗ rỗng đến mô đun K_{eff} và G_{eff} của vật liệu khoét lỗ.	86
5.7	Lưới phần tử của phần tử tấm đại diện với thể tích lỗ thay đổi.	87
5.8	Chuyển vị tấm vi mô với biến dạng κ_{xx} và $V_f = 0.1$	88
5.9	Chuyển vị của tấm vi mô với biến dạng κ_{yy} và $V_f = 0.1$	89
5.10	Chuyển vị của tấm vi mô với biến dạng κ_{xy} và $V_f = 0.1$	89
5.11	Lưới phần tử tam giác với thể tích lỗ thay đổi $V_f = 0.1 : 0.4$	90
5.12	Độ võng tại giữa tấm trong hai điều kiện biên với tấm nguyên.	92
5.13	Trường chuyển vị tấm ba lớp đồng nhất hóa biên tựa với $V_f = 0.1$	92
5.14	Trường chuyển vị tấm ba lớp đơn tỉ lệ biên tựa với $V_f = 0.1$	92
6.1	Ứng suất vĩ mô trong kết cấu tấm chịu kéo có lỗ	99
6.2	Lưới phần tử tam giác của hai Mẫu RVE vật liệu có lỗ.	99
6.3	Miền cường độ ứng suất vĩ mô của vật liệu có lỗ hình tròn.	100
6.4	Miền cường độ ứng suất vĩ mô của vật liệu có lỗ hình chữ nhật.	100
6.5	Cường độ kéo dọc trục với góc α của RVE lỗ hình chữ nhật.	101
6.6	Cường độ kéo dọc trục khi góc α và bán kính (r/a) thay đổi.	101
6.7	Cơ cấu phá hoại của vật liệu có lỗ hình chữ nhật $(L_1 \times L_2 = 0.1 \times 0.5)$	102

6.8	Cơ cấu phá hoại của vật liệu có lỗ hình tròn ($r/a = 0.25$).	102
6.9	Mặt chảy dẻo 3D của vật liệu có lỗ chữ nhật.	103
6.10	Mặt chảy dẻo 3D của vật liệu có lỗ tròn.	103
6.11	Miền cường độ vĩ mô của vật liệu hỗn hợp cốt sợi	104
6.12	Cơ cấu phá hoại của vật liệu hỗn hợp cốt sợi: tải dọc trục hai phương.	105
6.13	Miền cường độ vĩ mô của vật liệu hỗn hợp cốt sợi: vật liệu A. . . .	105
6.14	Miền cường độ vĩ mô của vật liệu hỗn hợp cốt sợi: vật liệu B. . . .	106
6.15	Vật liệu khoét lỗ bao gồm hai lỗ với các vị trí khác nhau.	107
6.16	Sự ảnh hưởng của việc bố trí lỗ rỗng đến cường độ vĩ mô chịu kéo.	107
6.17	Cơ cấu phá hoại của vật liệu bị khoét hai lỗ dưới tải trọng dọc trục.	108
6.18	Bài toán vật liệu thép lỗ đều: $l/a = 0.2, 2r/a = 0.1$	108
6.19	Bài toán vật liệu thép bị khoét lỗ đều: lưới phần tử hữu hạn.	109
6.20	Bài toán tấm khoét nhiều lỗ: cường độ vĩ mô với góc kéo α thay đổi.	109
6.21	Bài toán tấm khoét nhiều lỗ: cơ cấu phá hoại.	110
6.22	Miền cường độ vĩ mô 3D của tấm nhiều lỗ ($\Sigma_{11}, \Sigma_{22}, \Sigma_{12}$).	110
7.1	Hình học và lưới phần tử hữu hạn của vật liệu hỗn hợp gia cường sợi.	119
7.2	Miền cường độ hữu hiệu của vật liệu hỗn hợp gia cường cốt sợi tròn.	120
7.3	Mặt dẻo hữu hiệu cho vật liệu gia cường sợi tròn.	121
7.4	Mặt dẻo hữu hiệu của vật liệu gia cường cốt sợi tròn	122
7.5	Mặt dẻo hữu hiệu khi vật liệu theo các tiêu chuẩn khác nhau. . . .	122
7.6	Cơ cấu phá hoại của vật liệu hỗn hợp gia cường cốt sợi: tải đơn trục.	123
7.7	Ảnh hưởng thể tích cốt sợi lên mặt chảy dẻo hữu hiệu	123
7.8	Phần tử đại diện của vật liệu có lỗ tuần hoàn với thể tích lỗ rỗng $V_f = 0.2$	124
7.9	Mặt dẻo hữu hiệu của vật liệu Tsai-Wu có lỗ rỗng tròn tuần hoàn .	124
7.10	Các mặt cắt của mặt dẻo tối ưu cho vật liệu Tsai-Wu có lỗ tuần hoàn.	125
7.11	Mặt dẻo hữu hiệu vật liệu có lỗ với vật liệu nền Mises, Hill và Tsai.	126

7.12	Miền cường độ hữu hiệu của vật liệu có lỗ tròn với $V_f=0.2$	127
7.13	Cơ cấu phá hoại trong vật liệu vi mô có lỗ tròn: tải dọc trục.	127
7.14	Lưới phần tử trong trường hợp phân bố ngẫu nhiên 16 lỗ và $V_f = 0.2$	128
7.15	Phân bố của ứng suất vĩ mô giới hạn trong bài toán 16 lỗ và $V_f = 0.2$.	129
7.16	Năng lượng tiêu tán dẻo của RVE với lỗ rỗng ngẫu nhiên.	129
7.17	Miền cường độ của vật liệu có lỗ rỗng ngẫu nhiên và $V_f = 0.2$	130
8.1	Bài toán đa tỉ lệ trong miền đàn hồi cho kết cấu tấm phẳng hai chiều	132
8.2	Bài toán đa tỉ lệ trong miền đàn hồi với phần tử đại diện ba chiều .	134
8.3	Bài toán đa tỉ lệ trong miền đàn hồi cho kết cấu tấm chịu uốn	135
8.4	Bài toán thiết kế dẻo cho vật liệu tiêu chuẩn Hill	137
8.5	Bài toán thiết kế dẻo cho vật liệu theo tiêu chuẩn Tsai-Wu	138
9.1	Sơ đồ giải thuật bài toán đa tỉ lệ trong miền đàn hồi.	141
9.2	Sơ đồ giải thuật bài toán đa tỉ lệ cho bài toán thiết kế dẻo.	142

Danh mục chữ viết tắt

FFT	: Fast Fourier Transform. : Khai triển chuỗi Fourier nhanh.
VCFEM	: Vorrnoi Cell Finite Element Method. : Phương pháp phần tử hữu hạn miền vorronoi.
RVE	: Representation Volume Element. : Phần tử thể tích đại diện.
HCT	: Heish Clough Tocher. : Phần tử tám HCT.
RPE	: Representative Plate Element. : Phần tử tám đại diện .
ES-FEM	: Edge Smooth-Finite Element Method. : Phần tử làm trơn trên cạnh.
LSA	: Least Square Approximate. : Xấp xỉ bình phương cực tiểu.
FEM	: Finite Element Method. : Phương pháp phần tử hữu hạn.
FE ²	: (Finite Element Method) ² . : Phương pháp phần tử hữu hạn trong hai cấp độ.

Chương 1

Tổng quan

1.1 Giới thiệu

Với sự tiến bộ khoa học kỹ thuật ngày càng mạnh mẽ, các vật liệu mới với cấu trúc phức tạp được sử dụng ngày càng rộng rãi. Việc trộn lẫn các cốt liệu khác nhau nhằm tận dụng được các thuộc tính có lợi ngày càng trở nên phổ biến. Điều này có thể tạo ra những vật liệu có khả năng chịu va đập, mài mòn, nhiệt độ để làm việc trong các môi trường làm việc đặc biệt. Vật liệu trong tự nhiên và nhân tạo nói chung được xem là đa tỉ lệ, bởi vì cấu trúc cấp độ lớn được cấu tạo từ các cấu trúc cấp độ nhỏ hơn. Phương pháp tính toán đa tỉ lệ là nhằm xem xét mối liên hệ giữa hai cấp độ là cấp độ vi mô và cấp độ vĩ mô. Tính toán đồng nhất hóa đạt được hiệu quả khi xem xét trung bình tổng thể thay vì tính toán từng kết cấu vi mô đơn lẻ.

Mô hình bài toán vi mô thường có kết cấu phức tạp về hình dáng, thành phần và sự phân bố các pha vật liệu khác nhau của kết cấu vi mô. Điều này ảnh hưởng mạnh mẽ đến quá trình mô phỏng vật liệu có kết cấu phức tạp như là dữ liệu bị quá tải và khó xuất ra thông tin mong muốn. Phương pháp đa tỉ lệ có thể giải quyết được vấn đề này bằng cách tận dụng sự chính xác của kết cấu vi mô và sự hiệu quả của các bài toán đồng nhất quen thuộc. Phương pháp đạt được hiệu quả trong việc giảm khối lượng tính toán và đồng thời cung cấp độ chính xác mong muốn.

Đặc biệt khi xét về kết cấu tấm, các phương pháp “laminated plate theory” hoặc “the rule of mixture” thường được sử dụng để kể đến sự phức tạp theo chiều dày tấm khi xác định các thuộc tính hữu hiệu cho kết cấu tấm. Nhưng việc tính toán sẽ gặp khó khăn trong việc mô phỏng cấu tạo phức tạp trên toàn bộ vật thể. Điều này có thể được giải quyết bằng cách sử dụng một phần tử đại diện cho tấm không đồng nhất.

1.2 Tổng quan các hướng nghiên cứu

1.2.1 Phương pháp đa tỉ lệ trong miền đàn hồi

Đầu tiên, phương pháp cận và ước lượng khác được trình bày bởi Voigt [1] và Reuss [2] đến nghiên cứu của Hashin và Shtrikman [3] và được phát triển cho tính toán kết cấu tấm của Kolpakov và các cộng sự [4, 5]. Bên cạnh đó, mô hình dựa trên FFT được đưa ra bởi Moulinec và Suquet [6]. Ngoài ra, phương pháp Voronoi cell finite element method (VCFEM) được đề xuất bởi Ghosh [7] và phương pháp đa tỉ lệ sử dụng FE^2 bởi Feyel [8]

Phương pháp cận

Trong những thập kỉ gần đây, một khối lượng lớn các bài báo được phát triển nhằm giải quyết kĩ thuật mô hình cơ học vi mô của vật liệu không đồng nhất. Xa hơn nữa thì thuộc tính hữu hiệu được quan tâm, rất nhiều hướng tiếp cận được chia ra thành hai mảng lớn, phụ thuộc vào tính chất cấp độ vi mô.

Trong trường hợp composite với ứng xử tuyến tính, nếu cấu trúc vi mô là đều để được xem như là tuần hoàn, thuộc tính hữu hiệu có thể được xác định với điều kiện biên xấp xỉ. Nếu cấu trúc vi mô không tuần hoàn thì thuộc tính hữu hiệu không thể được xác định chính xác. Vì vậy mục tiêu được thay đổi thành việc xác định biên độ dao động có thể của ứng xử hữu hiệu bằng phương pháp cận. Điều này phụ thuộc vào một vài yếu tố kết cấu vi mô, như là tỉ lệ thể tích của cốt liệu trong vật liệu nền và sự khác biệt về thuộc tính của vật liệu nền và vật liệu gia cường. Để thực hiện được điều này, rất nhiều phương pháp đồng nhất hóa đã được đề xuất. Nghiên cứu đầu tiên của Voigt [1] và Reuss [2] về tính toán biên cứng cho mô đun đàn hồi của vật liệu hỗn hợp theo tỉ lệ thể tích.

Vài thập kỉ sau, Hashin và Shtrikman [3] đã trình bày một sự mở rộng của phương pháp dựa trên công thức biến phân. Phương pháp cận này chịu ảnh hưởng lớn bởi kích thước mẫu và chỉ được kiểm chứng khi vật thể được giả thiết là vô cùng lớn so với mẫu đại diện.

Bằng phương pháp nguyên lý biến phân tổng quát của Washizu [9] đã áp dụng trong bài toán phi tuyến, phương pháp tính toán kiểu tổng thể - cục bộ có thể được hợp nhất với sự hỗ trợ của chương trình đồng nhất hóa cho bài toán phi tuyến tổng quát.

Terada và Kukichi [10] đã đề xuất thuật toán mô phỏng hai cấp độ cho việc phân tích vật liệu không đồng nhất có cấu trúc vi mô tuần hoàn bằng cách sử dụng phát

biểu biến phân.

Sau đó đã có những nghiên cứu [11–13] và [14] xác định mô đun đàn hồi cho vật liệu đa tinh thể dị hướng. Áp dụng cho tấm không đồng nhất đã được thực hiện bởi Kolpakov và các cộng sự [4, 5] (hiệu chỉnh cận của Voigt and Reuss); Nguyen và các cộng sự (hiệu chỉnh cận của Hashin-Shtrikman) [15]. Tuy nhiên nhược điểm của phương pháp cận là biên độ dao động lớn khi hai pha vật liệu có sự khác biệt lớn, chưa kể đến ảnh hưởng của hình học của các pha vật liệu vi mô.

Phương pháp xấp xỉ chuỗi

Walker và các cộng sự [16] sử dụng giả thuyết kết cấu vi mô tuần hoàn với xấp xỉ chuỗi Fourier để phân tích ứng xử phi tuyến nhớt dẻo của vật liệu hỗn hợp cốt sợi. Các Cell đơn vị được rời rạc hóa thành các phần tử tam giác. Trong mỗi bước gia tải tổng biến dạng tại mỗi điểm được chi phối bởi phương trình tích phân. Trường biến dạng và trường ứng suất trong vòng lặp cell đơn vị được bao gồm việc sử dụng xấp xỉ chuỗi Fourier. Các tác giả đã trình bày rằng bài toán có thể được viết bằng cách sử dụng tiếp cận công thức Green, một phương pháp tổng quát vì nó không cần giả thuyết tuần hoàn, và cho điều này thì độ chính xác số hội tụ một cách nhanh chóng.

Fotiu và Nemat [17] đã sử dụng xấp xỉ chuỗi Fourier để ước lượng tính chất của vật liệu hỗn hợp tuần hoàn đàn nhớt dẻo trong giả thiết về sự phân bố của nhân. Các nghiên cứu được thực hiện với mô hình không gian ba chiều cũng như các bài toán ứng suất phẳng và biến dạng phẳng. Để tránh sự khó khăn của việc tạo lưới phần tử trong trường hợp cấu trúc vi mô phức tạp khi giải các bài toán bằng phương pháp phần tử hữu hạn, và để lấy trực tiếp bằng cách sử dụng hình ảnh cấu trúc vi mô của vật liệu không đồng nhất, Moulinec và suquet [6, 18] đã đưa ra trong một phương pháp thay thế dựa trên khai triển chuỗi Fast Fourier Transforms (FFT). Thuật toán FFT yêu cầu dữ liệu mẫu trong một lưới của không gian đều, mà cho phép sử dụng trực tiếp hình ảnh của cấu trúc vi mô.

Phương pháp này có ba điểm thuận lợi. Đầu tiên là hình ảnh của kết cấu vi mô có thể được sử dụng trực tiếp để phân tích, điều này tránh việc mesh lưới cho kết cấu vi mô. Tiếp theo là chương trình vòng lặp không yêu cầu thông tin của một ma trận độ cứng. Cuối cùng là sự hội tụ nhanh. So sánh kết quả giữa phần tử hữu hạn và phương pháp FFT được thể hiện trong nghiên cứu của Bary [19, 20] với phần tử đại diện ba chiều cho vật liệu bê tông. Bên cạnh đó thì có các điểm giới hạn như sau sự hội tụ có thể không đảm bảo khi xem xét vật liệu có lỗ trống hay có cốt hạt.

Để có thể áp dụng phương pháp này cho trường hợp các pha vật liệu chênh lệch

lớn về ứng xử cơ học, Eyre và Milton [21] phát triển chương trình bởi giới thiệu một thuật gia tốc. Tốc độ hội tụ được cải thiện với khai triển hàm bậc hai với biến là các thông số đàn hồi của các pha vật liệu nhưng vẫn không áp dụng được cho vật liệu lỗ rỗng. Một phương pháp thay thế dựa trên Lagrangians bổ sung và phép biến đổi Fourier đã được đưa ra sau đó qua bài báo của Michel và các cộng sự [22] đã giải quyết được bài toán cho vật liệu lỗ rỗng. Mở rộng cho kết cấu tấm tuần hoàn được thực hiện bởi [23].

Phương pháp miền phần tử Voronoi (VCFEM)

Một trong những phân tích đầu tiên sử dụng tính toán tổng thể và cục bộ được thực hiện bởi Ghosh và các cộng sự [24, 25] với Voronoi Cell Finite Element Method (VCFEM). Trong phương pháp này, mỗi miền đa giác của một Cell trở thành một phần tử đại diện. Điều này là một phát triển về việc phân chia không gian, miền đa giác được giới hạn bởi tập hợp các điểm, bằng cách đó mà một điểm được hỗ trợ bởi một miền cách biệt giữa các điểm khác. Vùng được chia này được gọi là Voronoi Cell. Những Cell này có thể được xác định với một phần tử cơ bản trong kết cấu vi mô không đồng nhất. Chúng đại diện vùng của sự ảnh hưởng tức thì cho mỗi sự không đồng nhất và cũng xác định vùng lân cận bởi các mặt của cell. Các điểm hạt nhân được thay thế bằng sự không đồng nhất với hình dạng, kích thước và hướng chính. Việc rời rạc hóa có thể kể đến những đặc tính này và tránh sự giao cắt của biên voronoi với sự không đồng nhất của miền vật liệu.

Một kỹ thuật chia lưới với hình dạng đa giác bất kỳ, kích thước và sự phân bố không gian của hạt nhân được giới thiệu bởi Ghosh và Mulkopadhyay [24]. Lưới tổ ong của phần tử vật liệu đại diện cấp độ vi mô rời rạc hóa miền thành tập hợp các đa giác voronoi hoặc cells. Mỗi cell Voronoi bao gồm hai pha vật liệu là vật liệu nền và vật liệu cốt hạt. Hướng tiếp cận này đã được phát triển để xử lý một cách trực tiếp vật liệu hai pha dạng đa giác như phần tử trong mô hình phần tử hữu hạn của Gosh và Mulkopadhyay [24] cho trường hợp đàn hồi tuyến tính.

Phương pháp đa tỉ lệ phần tử hữu hạn (FE²)

Phân tích hữu hạn của vật liệu không đồng nhất tuần hoàn với một phần tử thể tích đại diện (RVE) đang thu hút sự chú ý của các nhà nghiên cứu trong thời gian gần đây. Khối lượng lớn các nghiên cứu về quan hệ cấp độ vi mô và vĩ mô đã được phát triển. Trong đó các nghiên cứu sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn chiếm đa số như là Smit [26], Feyel [8, 27], Miehe và các cộng sự [22, 28], Terada và Kukichi [10].

Trong các nghiên cứu phân tích sử dụng phần tử đại diện (RVE), ý tưởng mà

sử dụng phần tử hữu hạn rời rạc cấu trúc vi mô để liên kết với cấp độ vĩ mô được đưa ra đầu tiên bởi Renard và các cộng sự [29]. Bài báo đã tổng quát hóa và thiệu bằng phần tử hữu hạn thông thường được thực hiện bởi Feyel [8], về phân tích phá hoại và ứng xử dẻo nhớt của vật liệu composite.

Bài toán hai cấp độ được dẫn từ bài toán biến phân được giải quyết sau đó bằng cách sử dụng thuật giải vòng lặp Newton-Rapshon. Tính toán thành công cho vật liệu đàn dẻo không đồng nhất, phân tích số dẫn đến sự khó khăn trong bài toán tổng thể của phân tích phi tuyến đa tỉ lệ. Bởi vì bài toán RVE được giải trên các điểm Gauss của lưới FE của toàn bộ kết cấu, chuyển vị tại vòng lặp t_n phải lặp cho đến khi thỏa phương trình cân bằng mới qua vòng lặp t_{n+1} . Việc lưu tất cả thông tin tại điểm Gauss chiếm bộ nhớ lưu trữ lớn trong quá trình tính toán. Miehe và các cộng sự [28] trình bày một công trình lý thuyết và tính toán của việc giải quyết kết cấu vĩ mô đồng nhất cùng với một kết cấu vi mô.

Qua các hướng nghiên cứu trên, việc đưa ra các thông số đàn hồi hữu hiệu cho vật liệu không đồng nhất đang thu hút các nghiên cứu của các nhà khoa học trên thế giới. Luận án tập trung vào phương pháp phần tử hữu hạn ở hai cấp độ với việc phát triển điều kiện biên tuần hoàn và điều kiện biên tuyến tính cho các kết cấu tấm khác nhau như là kết cấu tấm phẳng chịu lực màng, kết cấu tấm đại diện ba chiều và kết cấu tấm mỏng chịu uốn khi xấp xỉ trường chuyển vị tổng. Qua đó, độ chính xác của các thông số đàn hồi hữu hiệu được gia tăng và đáp ứng tốt hơn đối với sự đa dạng của vật liệu hỗn hợp.

1.2.2 Phương pháp đa tỉ lệ ngoài miền đàn hồi

Ứng xử phi tuyến của vật liệu khi nằm ngoài giai đoạn đàn hồi luôn tạo được sức hút đối với nhà nghiên cứu trong những năm gần đây. Mô hình của các phương pháp đa tỉ lệ được chia thành nhiều cấp độ với từng yêu cầu về sự chính xác tương ứng của mỗi cấp độ tính toán. Ý tưởng mô hình toán có thể bao gồm mối liên hệ giữa hàm liên tục của không gian và thời gian nhằm mô tả sự không đồng nhất của một vật liệu hay các thông số vật liệu đã được đề xuất bởi Meyer [30]. Trung bình thông số vật liệu của phần tử đại diện của tỉ lệ thấp hơn thì giúp xác định được thông số vật liệu của một điểm vật liệu của tỉ lệ lớn hơn. Các nghiên cứu về phân tích đa tỉ lệ đã được thực hiện nhằm đảm bảo mối liên hệ của các cấp độ tỉ lệ của mô hình vật liệu hay kết cấu như Zohdi và Wridggers[31], Ladevdz và Fish [32], Ma và các cộng sự [33, 34], Sadowski [35], Li và các cộng sự [36], Galvanetto và các cộng sự[37]

Tiêu chuẩn dẻo cho bài toán cấp độ vĩ mô

Mặt cắt ngang của một cấu kiện trong kết cấu, một cách tổng quát, chịu tải trọng bởi tổ hợp các thành phần lực dọc, lực uốn theo các phương khác nhau, lực cắt và mô men xoắn. Mặt dẻo tương tác được xác định cho các cấu kiện khác nhau được thực hiện bởi Hodge [38], Save và Massonnet [39], Zyczkowski[40], Sawczuk [41]. Mở rộng nghiên cứu hàm dẻo tương tác, mặt dẻo tổng quát, cho kết cấu tấm tròn biên tựa được thực hiện trong nghiên cứu của Liu và Jiang [42]. Nghiên cứu đã thực hiện tăng tải từng bước nhằm mô tả sự hình thành vùng chảy dẻo và sự phát triển của vùng dẻo theo từng bước gia tải. Bên cạnh đó, hàm dẻo tổng quát đã tìm thấy với sự thay đổi các giá trị tải trọng khác nhau. Các nghiên cứu tương tự đã được hiện bởi Yu và các cộng sự [43, 44] với lý thuyết dẻo hiệu chỉnh tuyến tính hóa từng đoạn.

Bài toán phân tích giới hạn cho kết cấu hiện đang phát triển và được các nghiên cứu vì tính hiệu quả khi xác định trực tiếp tải trọng giới hạn của kết cấu và dự đoán cơ cấu phá hoại thông qua sự phân bố của năng lượng tiêu tán dẻo. Một yêu cầu tiên quyết khi thực hiện các bài toán phân tích dẻo này là phải xác định được hàm dẻo của các vật liệu khác nhau. Các thông số này có thể xác định thông qua các thực nghiệm cho từng loại vật liệu đồng nhất đẳng hướng với mặt dẻo lồi như kim loại (von Mises và Tresca), đất (Mohr-coulomb và Drucker-Prager) hay vật liệu đồng nhất bất đẳng hướng như tiêu chuẩn Hill và tiêu chuẩn Tsai-Wu. Bên cạnh đó, nghiên cứu của Bigoni [45] được thực hiện nhằm hiệu chỉnh tiêu chuẩn dẻo cho vật liệu giòn như bê tông và vật liệu cốt kết như đất. Qua đó, tiêu chuẩn dẻo không phải cụ thể là sự chảy dẻo, sự phá hoại hay sự nứt gãy mà là miền giới hạn ứng suất có thể đạt đến của vật liệu. Qua đó, yêu cầu xác định miền cường độ giới hạn cho các vật liệu phức tạp ngày càng trở nên cấp thiết. Điều này có thể được giải quyết khi xem xét khả năng chịu lực của cấu trúc vi mô.

Tiêu chuẩn dẻo cho bài toán cấp độ vi mô

Ngày nay, các vật liệu nhân tạo mới hay các vật liệu tự nhiên được nghiên cứu sâu hơn cần xác định được tiêu chuẩn dẻo thích hợp. Các nghiên cứu về tiêu chuẩn dẻo hiện nay được phát triển mạnh mẽ và tổng kết các dạng hàm tiêu chuẩn dẻo trong nghiên cứu Kolupaev [46]. Hơn thế nữa, các thông số của hàm tiêu chuẩn dẻo hữu hiệu có thể xác định thông qua việc xem xét ứng xử của kết cấu vi mô khi làm việc ngoài miền đàn hồi. Mở rộng nghiên cứu phương pháp đa tỉ lệ cho vật liệu ngoài miền đàn hồi là sự kết hợp của kỹ thuật đồng nhất hoá và phân tích giới hạn để tìm được tiêu chuẩn dẻo hữu hiệu của vật liệu cho các hỗn hợp hay miền ứng

suất giới hạn. Mô hình đồng nhất hóa cho vật liệu kim loại trong nghiên cứu của Gurson [25] cho vật liệu có lỗ rỗng hình thoi dựa trên phân tích giới hạn với vật liệu nền tuân theo tiêu chuẩn dẻo von Mises.

Bên cạnh đó, phương pháp mà Li và các cộng sự [47–50] đã thực hiện nhằm xác định các thông số hữu hiệu của tiêu chuẩn dẻo của vật liệu kim loại gia cường sợi dựa trên sự kết hợp của lý thuyết giới hạn động học và lý thuyết đồng nhất hóa. Bằng cách áp dụng trực tiếp tiêu chuẩn von Mises cho vật liệu nền kết hợp lý thuyết phân tích giới hạn động học, một phương trình tối ưu hóa phi tuyến được đề xuất để được tính toán cường độ giới hạn của vật liệu sợi. Khi xem xét kéo nén phần tử đại diện, tiêu chuẩn von Mises và tiêu chuẩn Tresca không thể đáp ứng cho vật liệu có cường độ khả năng chịu kéo khác cường độ khả năng chịu nén theo mỗi phương chịu lực. Thuyết dẻo tổng quát được đề xuất trong nghiên cứu của Yu và các cộng sự bằng cách tuyến tính hóa hàm tiêu chuẩn dẻo từng đoạn.

Tiêu chuẩn dẻo hữu hiệu cho kết cấu tường gạch hai chiều được so sánh với thực nghiệm [51, 52] và nhà xây bằng gạch trong không gian ba chiều [53] hay cầu gạch, đất gia cường cọc xi măng [54]. Tiêu chuẩn dẻo tổng quát cho vật liệu Tiêu chuẩn chảy dẻo cho kim loại thủy tinh dựa trên nền tảng nguyên tử được thực hiện bởi Schuh và Lund [55, 56]. Qua đó, nghiên cứu đánh giá sự ảnh hưởng của hình dạng lỗ rỗng và thể tích lỗ rỗng đến tiêu chuẩn dẻo hữu hiệu của vật liệu vi mô.

Thông thường, việc xác định tiêu chuẩn dẻo, miền cường độ của vật liệu, thông qua các thí nghiệm dẫn đến phá hủy vật liệu. Bên cạnh đó, khi phân bố vật liệu ngẫu nhiên thì xác suất lặp lại thí nghiệm rất thấp. Điều này dẫn đến phải thực hiện số lượng mẫu đủ lớn để đủ bao quát các trường hợp nguy hiểm. Vấn đề này được giải quyết khi thực hiện các mô phỏng số. Các mô hình số được thực hiện thay các thí nghiệm hiện trường giúp tiết kiệm chi phí. Luận án tập trung vào việc xây dựng các hàm dẻo hữu hiệu cho hỗn hợp vật liệu không đồng nhất. Các ứng suất giới hạn được xác định thông qua bài toán phân tích giới hạn cho kết cấu vi mô với điều kiện biên tuần hoàn khi xấp xỉ trường chuyển vị tổng. Hai tiêu chuẩn dẻo Hill và Tsai-Wu được sử dụng cho vật liệu bất đẳng hướng.

1.3 Mục tiêu và phạm vi của luận án

1.3.1 Mục tiêu luận án

Luận án tập trung nghiên cứu các phương pháp đa tỉ lệ cho kết cấu tấm không đồng nhất trong và ngoài miền đàn hồi. Trường hợp vật liệu trong miền đàn hồi,

các thông số đàn hồi hữu hiệu được xác định thông qua kỹ thuật đồng nhất hóa vật liệu của bài toán cấp độ vi mô. Ba dạng phần tử đại diện được xem xét như tấm phẳng chịu lực màng, tấm ba chiều và tấm mỏng chịu uốn. Trường hợp vật liệu ngoài miền đàn hồi, kỹ thuật đồng nhất hóa được kết hợp với lý thuyết phân tích giới hạn nhằm xác định được miền cường độ hữu hiệu, hàm tiêu chuẩn dẻo hữu hiệu, của vật liệu không đồng nhất ở cấp độ vĩ mô. Khi xấp xỉ hàm dẻo hữu hiệu cho kết cấu tấm vi mô, hai tiêu chuẩn dẻo cho vật liệu bất đẳng hướng như Hill và Tsai-Wu được xem xét.

1.3.2 Phạm vi nghiên cứu

Đối với trường hợp vật liệu trong miền đàn hồi, các pha vật liệu trong cấu trúc vi mô được xem là đồng nhất và đẳng hướng. Tuy nhiên, tùy thuộc vào sự phân bố của các pha vật liệu khác nhau trong kết cấu vi mô có thể dẫn đến kết quả vật liệu cấp độ vĩ mô được xem là đồng nhất và bất đẳng hướng. Hai Điều kiện biên trong bài toán đàn hồi được thực hiện là biên tuyến tính và biên tuần hoàn. Bên cạnh đó, mối liên hệ giữa biến dạng tại điểm vật liệu của cấp độ vĩ mô và chuyển vị cưỡng bức tại các nút trên biên phần tử đại diện trong kết cấu tấm phẳng và không gian ba chiều là bậc nhất. Riêng với trường hợp tấm phẳng chịu uốn, mối liên hệ này là bậc hai.

Đối với trường hợp vật liệu ngoài miền đàn hồi, vật liệu nền trong kết cấu vi mô được giả thuyết tuân theo mô hình vật liệu cứng dẻo lý tưởng trong bài toán phân tích giới hạn cho kết cấu vi mô. Trường chuyển vị tổng của kết cấu vi mô được rời rạc hóa. Phần tử đại diện hình vuông có kích thước đơn vị. Điều kiện biên tuần hoàn được tích hợp vào ràng buộc của bài toán phân tích giới hạn cho kết cấu vi mô. Mối liên hệ giữa biến dạng tại một điểm vật liệu cấp độ vĩ mô và chuyển vị trên biên của phần tử đại diện cấp độ vi mô là bậc nhất. Qua đó, hàm miền cường độ của vật liệu được xấp xỉ theo phương pháp bình phương cực tiểu thông qua các điểm ứng suất vĩ mô giới hạn thu được trong bài toán phân tích giới hạn cấp độ vi mô. Các pha vật liệu nền trong cấu trúc vi mô được xem xét tuân theo ba tiêu chuẩn von Mises, Hill và Tsai-Wu. Tuy nhiên, sự đa dạng của cấu trúc vi mô và phân bố hướng vật liệu dẫn đến vật liệu cấp độ vĩ mô xem như tuân theo tiêu chuẩn dẻo dạng Hill và Tsai-Wu. Khi xấp xỉ hàm dẻo hữu hiệu cho kết cấu tấm vi mô, tiêu chuẩn dẻo Hill tổng quát hóa từ tiêu chuẩn dẻo von Mises cho vật liệu dẻo có cường độ chịu kéo bằng cường độ chịu nén. Tiêu chuẩn dẻo Tsai-Wu được xây dựng mở rộng cho trường hợp vật liệu dòn có cường độ chịu kéo khác cường độ chịu

nén.

1.4 Cấu trúc luận án

Luận án bao gồm 9 chương

- Chương 1 : Tổng quan. Chương này sẽ trình bày về tổng quan các nghiên cứu của các hướng nghiên cứu và đưa ra mục tiêu nghiên cứu cho luận án này.
- Chương 2 : Lý thuyết nền tảng. Chương này sẽ trình bày các cơ sở lý thuyết trong luận văn, bao gồm: mô hình vật liệu, lý thuyết đa tỉ lệ, lý thuyết phân tích giới hạn, lý thuyết tấm.
- Chương 3 : Bài toán đa tỉ lệ đàn hồi cho kết cấu tấm phẳng hai chiều. Chương này sẽ xem xét bài toán vi mô với phần tử đại diện tấm phẳng hai chiều. Các vật liệu khác nhau được xem xét như vật liệu có cốt sợi hình chữ nhật, vật liệu có cốt sợi tròn, vật liệu có lỗ rỗng, vật liệu có cơ tính biến thiên và vật liệu đa tinh thể dị hướng.
- Chương 4 : Bài toán tỉ lệ đàn hồi với phần tử đại diện ba chiều. Chương này sẽ xem xét bài toán vi mô với phần tử đại diện ba chiều. Các trường hợp phần tử đại diện ba chiều tuần hoàn được xem xét như là vật liệu nhiều lớp đứng, vật liệu nhiều lớp ngang và vật liệu xen kẽ. Bên cạnh đó, phần tử đại diện ba chiều chịu uốn như là tấm nhiều lớp chịu uốn và tấm có cơ lý biến thiên chịu uốn.
- Chương 5 : Bài toán đa tỉ lệ đàn hồi với tấm vi mô chịu uốn. Chương này sẽ trình bày xem xét bài toán tấm vi mô chịu uốn đại diện. Hai ví dụ số được thực hiện là kết cấu tấm vi mô có lỗ hình chữ nhật và kết cấu tấm vi mô nhiều lớp có lỗ hình tròn. Các thông số hữu hiệu được tính toán thông qua kỹ thuật đồng nhất hóa kết cấu tấm vi mô chịu uốn.
- Chương 6 : Miền cường độ hữu hiệu cho vật liệu không đồng nhất theo dạng tiêu chuẩn Hill. Chương này sẽ trình bày phương pháp xác định hàm dẻo hữu hiệu của vật liệu không đồng nhất nhưng đối xứng (cường độ chịu kéo và nén theo mỗi phương là bằng nhau) thông qua việc kết hợp phương pháp phân tích giới hạn và lý thuyết đồng nhất hoá cho bài toán RVE của tấm phẳng hai chiều.
- Chương 7 : Miền cường độ hữu hiệu cho vật liệu không đồng nhất theo dạng tiêu chuẩn Tsai-Wu. Chương này sẽ trình bày phương pháp xác định hàm dẻo hữu hiệu

cho vật liệu không đồng nhất và bất đối xứng (cường độ chịu kéo và nén theo mỗi phương đều khác nhau) thông qua việc kết hợp lý thuyết đồng nhất hóa và phân tích giới hạn cho bài toán tấm phẳng hai chiều.

Chương 8 : Thảo luận. Chương này sẽ phân tích ưu điểm và các hạn chế của các hướng nghiên cứu về phương pháp đa tỉ lệ trong miền đàn hồi và ngoài miền đàn hồi.

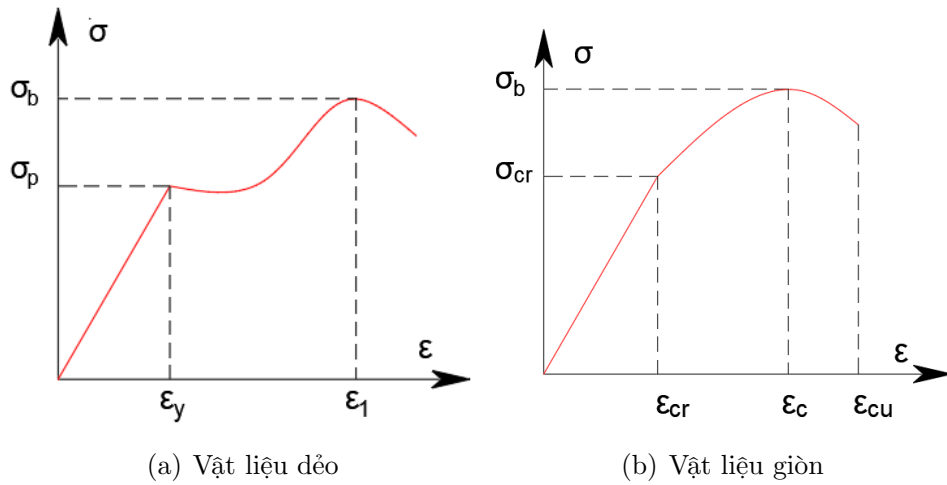
Chương 9 : Kết luận và kiến nghị. Chương này sẽ tổng kết các đóng góp của luận án. Qua đó, các kiến nghị về phương pháp giải quyết và hướng phát triển các nghiên cứu.

Chương 2

Lý thuyết nền tảng

2.1 Mô hình vật liệu

Ứng xử vật liệu được thể hiện thông qua đường cong mối quan hệ ứng suất và biến dạng. Thông thường, vật liệu được phân ra hai kiểu vật liệu là vật liệu dẻo và vật liệu giòn. Hai mối quan hệ ứng suất và biến dạng khác nhau được thể hiện như sau

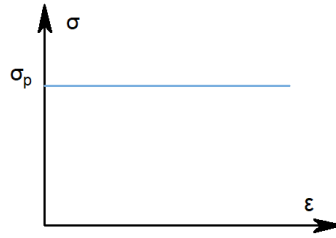


Hình 2.1: Mối liên hệ ứng suất và biến dạng của vật liệu dẻo và vật liệu giòn.

Việc phân tích ứng xử với đường cong thực của ứng suất và biến dạng thường gặp phải khó khăn. Trong lý thuyết phân tích giới hạn, mô hình lý tưởng hoá được áp dụng. Qua đó, lý thuyết này giúp xác định tải trọng phá hoại và dự đoán cơ cấu phá hoại tương ứng một cách trực tiếp mà không kể đến các giai đoạn phát triển của kết cấu. Hai mô hình thường được sử dụng để thực hiện là mô hình cứng dẻo lý tưởng và mô hình đàn dẻo lý tưởng.

2.1.1 Mô hình vật liệu cứng dẻo lý tưởng

Mô hình cứng dẻo lý tưởng được đưa ra bởi von Mises (1913). Mô hình này giả thiết rằng biến dạng đàn hồi không đáng kể so với biến dạng dẻo nên có thể bỏ qua. Trong mô hình này, vật liệu bỏ qua giai đoạn đàn hồi và có thể tiếp tục chảy dẻo đến khi đạt trạng thái phá hoại.



Hình 2.2: Mối liên hệ ứng suất và biến dạng trong mô hình cứng dẻo lý tưởng

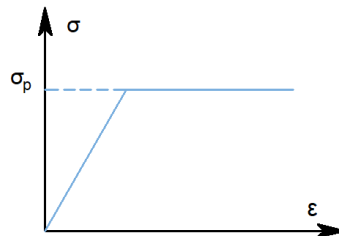
2.1.2 Mô hình vật liệu đàn dẻo lý tưởng

Mô hình đàn dẻo lý tưởng được đưa ra bởi Prandtl (1928). Mô hình bỏ qua hiện tượng tái bền hay hiện tượng mềm hoá. Hiện tượng chảy dẻo xảy ra khi ứng suất đạt đến trị số ngưỡng ứng suất được xem là tỷ lệ σ_H hoặc ứng suất chảy dẻo σ_P . Sau đó biến dạng sẽ tăng dần đến khi kết cấu đạt cơ cấu phá hoại.

$$\varepsilon = \begin{cases} \frac{\sigma}{E} & \text{khi } \sigma < \sigma_P \\ \frac{\sigma}{E} + \lambda & \text{khi } \sigma = \sigma_P \end{cases} \quad (2.1a)$$

$$(2.1b)$$

Biểu đồ quan hệ ứng suất biến dạng được thể hiện như hình



Hình 2.3: Mối liên hệ ứng suất và biến dạng trong mô hình đàn dẻo lý tưởng

2.1.3 Tiêu chuẩn chảy dẻo

Biến dạng vi phân tổng quát bao gồm các biến dạng đàn hồi và biến dạng dẻo

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p \Leftrightarrow \varepsilon_{ij}^{(*)} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p \quad (2.2)$$

Trong đó, biến dạng đàn hồi tuân theo định luật Hooke

$$\varepsilon_{ij}^e = H_{ijkl}\sigma_{kl} \Leftrightarrow \varepsilon_{ij}^e = H_{ijkl}\sigma_{kl} \quad (2.3)$$

Tồn tại một mặt đặt tải trong không gian ứng suất độc lập với thời gian

$$\begin{cases} f(\sigma_{ij}, k) < 0: & \text{vật liệu trong miền đàn hồi } \varepsilon_{ij}^p = 0 & (2.4a) \\ f(\sigma_{ij}, k) = 0: & \text{vật liệu xuất hiện biến dạng dẻo} & (2.4b) \\ f(\sigma_{ij}, k) > 0: & \text{vùng không thể đạt đến được} & (2.4c) \end{cases}$$

Trong đó,

+ σ_{ij} là các thành phần ứng suất.

+ k là thông số nội tại được xác định bằng thực nghiệm xét đến ảnh hưởng của các hiện tượng không thuận nghịch như tái bền hay mềm hoá.

$f(\sigma_{ij}, k) = 0$ là phương trình mặt chảy dẻo trong không gian ứng suất.

Nếu $k = 0$ thì ta có phương trình chảy dẻo lý tưởng.

Mô hình vật liệu phải tuân theo hai tiêu chuẩn chảy dẻo quan trọng đó là định đề Drucker về tính ổn định của vật liệu và luật chảy dẻo kết hợp.

Định đề Drucker-giả thiết về tính ổn định vật liệu

Định đề 2.1.1 *Vật liệu được xem là ổn định theo Drucker khi suốt chu trình tăng tải và dỡ tải vẫn đảm bảo: "Công thực thiện với một chu trình khép kín của tải trọng không âm".*

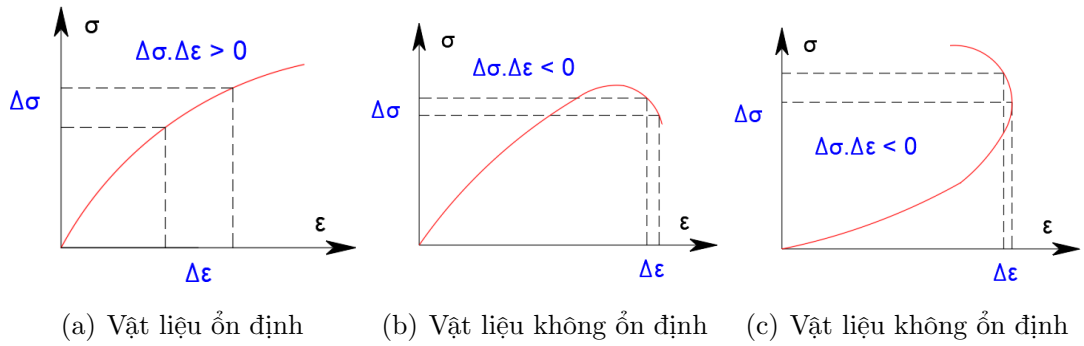
$$\oint (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0) d\varepsilon_{ij} \geq 0 \quad (2.5)$$

Trong đó, σ_{ij} là trường ứng suất hiện tại, σ_{ij}^0 là trường ứng suất ban đầu.

Định đề được thể hiện

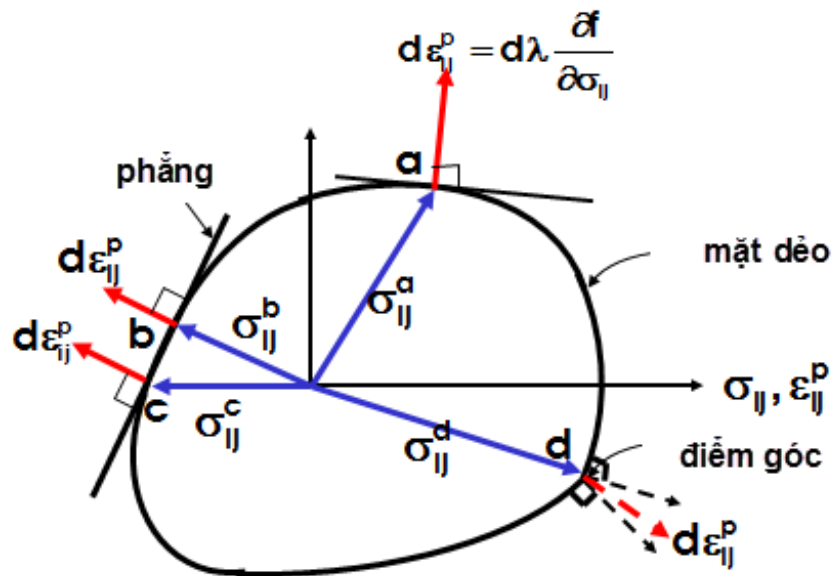
$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0) \varepsilon_{ij} \geq 0 \quad (2.6)$$

Công thức 2.6, bất đẳng thức Drucker, được thể hiện ở Hình 2.4 có thể áp dụng cho vật liệu dẻo lý tưởng và vật liệu tái bền.



Hình 2.4: Ứng xử tăng tải ổn định và không ổn định theo Drucker.

Luật chảy dẻo



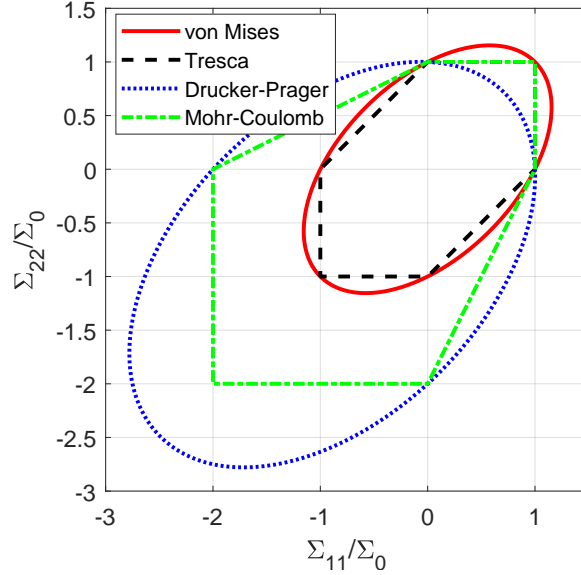
Hình 2.5: Hình học của luật chảy dẻo kết hợp.

Định đề 2.1.2 Luật chảy dẻo được phát biểu: " Vectơ gia số biến dạng dẻo (hay vận tốc biến dạng dẻo) vuông góc với mặt đặt tải và hướng ra ngoài mặt này".

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad \text{với } d\lambda \geq 0 \quad (2.7a)$$

$$\text{hay } \dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad \text{với } \dot{\lambda} \geq 0 \quad (2.7b)$$

Điều kiện để có thể áp dụng định luật này vào tính toán năng lượng tiêu tán dẻo của bài toán cận trên là hàm chảy dẻo $f(\sigma_{ij})$ là hàm lồi nghiêm ngặt (nghĩa là không có phần thẳng và điểm gãy góc). Điều này sẽ gây khó khăn khi xem xét các tiêu chuẩn có hàm dẻo phức tạp.



Hình 2.6: Các tiêu chuẩn dẻo cho vật liệu dẻo và vật liệu giòn.

Tiêu chuẩn Tresca dựa trên cơ sở ứng suất tiếp cực đại đạt giới hạn dưới dạng tổng quát tuyến tính từng đoạn được biểu diễn trong miền không gian ứng suất chính như sau

$$\frac{1}{2} \max(|\Sigma_1 - \Sigma_2|, |\Sigma_1 - \Sigma_3|, |\Sigma_2 - \Sigma_3|) = \Sigma_{SY} = \frac{1}{2} \Sigma_Y \quad (2.8)$$

Với Σ_{SY} , Σ_Y lần lượt là cường độ giới hạn chịu cắt và cường độ giới hạn chịu kéo dọc trục.

Tiêu chuẩn Tresca trong bài toán ứng suất phẳng được biểu diễn dưới dạng hàm bậc hai theo biến ứng suất như sau

$$\Phi_{Tresca} = \sqrt{(\Sigma_{11} - \Sigma_{22})^2 + 4 \times \Sigma_{12}^2} - \Sigma_Y = 0 \quad (2.9)$$

hay

$$\Phi'_{Tresca} = (\Sigma_{11} - \Sigma_{22})^2 + 4 \times \Sigma_{12}^2 - \Sigma_Y^2 \quad (2.10)$$

Tiêu chuẩn von Mises được xây dựng trên cơ sở năng lượng làm thay đổi hình dáng không đổi được thể hiện dưới dạng bất biến ứng suất lệch như sau

$$\Phi_{Mises} = \sqrt{J_2} - \Sigma_Y = 0 \quad (2.11)$$

Trong bài toán ứng suất phẳng tiêu chuẩn von Mises được biểu diễn dưới dạng hàm bậc hai theo biến ứng suất như sau

$$\Phi_{Mises} = \sqrt{\Sigma_{11}^2 + \Sigma_{22}^2 - \Sigma_{11} \times \Sigma_{22} + 3 \times \Sigma_{12}^2} - \Sigma_Y = 0 \quad (2.12)$$

hay

$$\Phi'_{Mises} = \Sigma_{11}^2 + \Sigma_{22}^2 - \Sigma_{11} \times \Sigma_{22} + 3 \times \Sigma_{12}^2 - \Sigma_Y^2 = 0 \quad (2.13)$$

Tiêu chuẩn Hill được xây dựng dưới dạng tổng quát của tiêu chuẩn von Mises cho vật liệu bất đẳng hướng. khi thể hiện dưới dạng hàm bậc hai theo ứng suất, tiêu chuẩn dẻo Hill được thể hiện như sau.

$$\begin{aligned} \Phi_{Hill} &= P_{11} \times \Sigma_{11}^2 + P_{22} \times \Sigma_{22}^2 - P_{12} \times \Sigma_{11} \times \Sigma_{22} + P_{33} \times \Sigma_{12}^2 - 1 = 0 \\ P_{11} &= \frac{1}{\Sigma_{px}^2} \\ P_{22} &= \frac{1}{\Sigma_{py}^2} \\ P_{12} &= \frac{1}{\Sigma_{px}^2} + \frac{1}{\Sigma_{py}^2} - \frac{1}{\Sigma_{pz}^2} \\ P_{33} &= \frac{1}{\Sigma_{pxy}^2} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Tiêu chuẩn Mohr-Coulomb thường được sử dụng cho vật liệu bê tông và đất vì thể hiện được sự khác biệt về cường độ chịu kéo và cường độ chịu nén của vật liệu. Cường độ chịu kéo và nén của vật liệu theo tiêu chuẩn Mohr-coulomb

$$\begin{aligned} \Sigma_{Yt} &= 2 \times c \times \frac{\cos \phi}{1 + \sin \phi} \\ \Sigma_{Yc} &= 2 \times c \times \frac{\cos \phi}{1 - \sin \phi} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Với c , ϕ là độ dính và góc nội ma sát trong của vật liệu. Σ_{Yt} , Σ_{Yc} là cường độ chịu kéo và nén của vật liệu.

Tiêu chuẩn Mohr-Coulomb trong bài toán ứng suất phẳng được thể hiện

$$\Phi_M = (\Sigma_{11} + \Sigma_{22}) \sin \phi + \sqrt{(\Sigma_{11} - \Sigma_{22})^2 + 4 \times \Sigma_{12}^2} - 2 \times c \times \cos \phi = 0 \quad (2.16)$$

Tiêu chuẩn Mohr-Coulomb được chuyển về dạng hàm bậc hai theo ứng suất

$$\Phi_M = (\Sigma_{11} - \Sigma_{22})^2 + 4 \times \Sigma_{12}^2 - (2 \times c \times \cos \phi - (\Sigma_{11} + \Sigma_{22}) \sin \phi)^2 = 0 \quad (2.17)$$

hay

$$\begin{aligned}
\Phi'_M &= P_{11}\Sigma_{11}^2 + P_{22}\Sigma_{22}^2 - P_{12}\Sigma_{11}\Sigma_{22} + 4\Sigma_{12}^2 + Q_{11}\Sigma_{11} + Q_{22}\Sigma_{22} - 4c^2 \cos^2 \phi = 0 \\
P_{11} &= 1 - \sin^2 \alpha \\
P_{22} &= 1 - \sin^2 \alpha \\
P_{12} &= 2 + 2 \sin^2 \alpha \\
Q_{11} &= 2 \times c \times \sin 2\phi \\
Q_{22} &= 2 \times c \times \sin 2\phi
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Trường hợp đặt biệt $\phi = 0$, tiêu chuẩn Mohr-Coulomb sẽ chuyển về dạng của tiêu chuẩn Tresca.

Tiêu chuẩn Drucker-Prager được phát triển từ tiêu chuẩn von Mises về dạng tiêu chuẩn Mohr-Coulomb theo các bất biến ứng suất như sau

$$\Phi_{Drucker} = \frac{\alpha - 1}{2} \times I_1 + \frac{\alpha + 1}{2} \sqrt{J_2} - \Sigma_Y = 0 \tag{2.19}$$

Với $\alpha = \frac{\Sigma_{Yc}}{\Sigma_{Yt}}$ là tỉ lệ giữa cường độ chịu kéo, Σ_{Yt} , và cường độ chịu nén, Σ_{Yc} , của vật liệu.

Trong bài toán ứng suất phẳng tiêu chuẩn Drucker-Prager được thể hiện

$$\Phi_D = \frac{\alpha - 1}{2} \times (\Sigma_{11} + \Sigma_{22}) + \frac{\alpha + 1}{2} \sqrt{\Sigma_{11}^2 + \Sigma_{22}^2 - \Sigma_{11}\Sigma_{22} + 3\Sigma_{12}^2} - \Sigma_Y = 0 \tag{2.20}$$

Tiêu chuẩn Drucker-Prager khi chuyển về dạng hàm bậc hai theo ứng suất

$$\begin{aligned}
\Phi'_D &= P_{11}\Sigma_{11}^2 + P_{22}\Sigma_{22}^2 - P_{12}\Sigma_{11}\Sigma_{22} + P_{33}\Sigma_{12}^2 + Q_{11}\Sigma_{11} + Q_{22}\Sigma_{22} - \Sigma_Y^2 = 0 \\
P_{11} &= \frac{\alpha^2 + 1}{2} \\
P_{22} &= \frac{\alpha^2 + 1}{2} \\
P_{12} &= \frac{\alpha^2 - \alpha + 2}{2} \\
P_{33} &= \frac{3 \times (\alpha + 1)^2}{4} \\
Q_{11} &= (\alpha - 1) \times \Sigma_Y \\
Q_{22} &= (\alpha - 1) \times \Sigma_Y
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Trường hợp đặc biệt khi $\alpha = \frac{\Sigma_{Yc}}{\Sigma_{Yt}} = 1$, cường độ chịu kéo bằng cường độ chịu nén, tiêu chuẩn Drucker-Prager sẽ trở thành tiêu chuẩn von Mises.

Dạng tổng quát tiêu chuẩn Tsai-Wu cho vật liệu bất đẳng hướng và có cường độ chịu kéo nén theo mỗi phương khác nhau. Tiêu chuẩn Tsai-Wu có thể sử dụng cho vật liệu dẻo và vật liệu giòn. Tiêu chuẩn Tsai-Wu được thể hiện qua biểu thức dưới dạng hàm bậc hai như sau

$$\Psi_T(\sigma) = \sigma^T \mathbf{P} \sigma + \sigma^T \mathbf{Q} - 1 = 0 \quad (2.22)$$

Với các ma trận hệ số \mathbf{P} và \mathbf{Q} đặc trưng cho các loại vật liệu bất đẳng hướng khác nhau.

2.2 Lý thuyết đa tỉ lệ

Khi bài toán được phân thành hai cấp độ (cấp độ vi mô và cấp độ vĩ mô). Qua đó, các lý thuyết đa tỉ lệ được xây dựng để đảm bảo mối liên hệ giữa hai cấp độ này.

Mối liên hệ này bao gồm hai bước như sau:

- + Biến dạng hoặc ứng suất của cấp độ vĩ mô truyền xuống thành điều kiện biên của bài toán cấp độ vi mô đại diện.
- + Trung bình hoá các thuộc tính và thông số bài toán vi mô đại diện (RVE) nhằm đưa lên một điểm vật liệu của bài toán

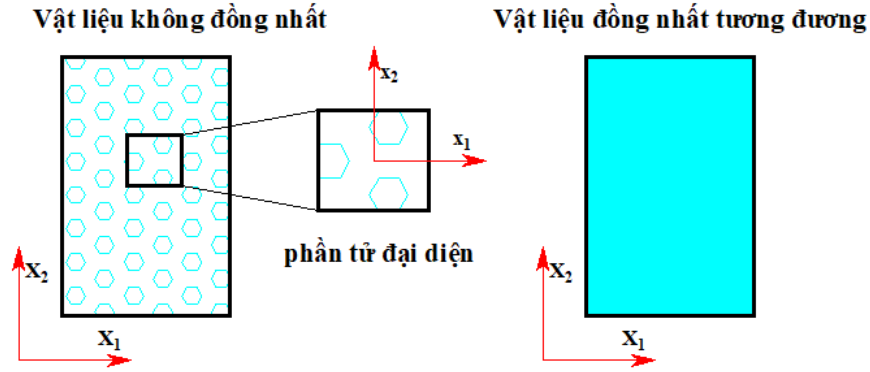
Ưu điểm của hướng tiếp cận đa tỉ lệ là việc đảm bảo được độ chính xác về cấu trúc vật liệu ở cấp độ vi mô và sau đó giảm được chi phí tính toán của cấp độ vĩ mô. Các thuộc tính vật liệu của hỗn hợp sẽ được trung bình hóa thể tích để đưa lên tính toán ở cấp độ trên. Thay vì chúng ta phải có một lưới rất mịn đối với mô hình phần tử hữu hạn thông thường để đảm bảo được độ chính xác về cấu trúc vật liệu.

Luận án thực hiện hai điều kiện biên (biên tuyến tính và biên tuần hoàn) nhằm mô tả biến dạng của cấp độ vĩ mô truyền xuống bài toán cấp độ vi mô. Đối với biên tuyến tính, chuyển vị của các nút trên biên được tính thông qua biến dạng từ cấp độ vĩ mô. Đối với biên tuần hoàn, điều kiện tiên quyết sẽ là hệ nút tuần hoàn (đối xứng trên biên). Tiếp theo là mối liên hệ giữa chuyển vị của các nút trên biên. Cuối cùng là chuyển vị của bốn nút góc được xác định thông qua biến dạng của cấp độ vĩ mô. Bên cạnh đó, định lý trung bình thể tích và nguyên lý Hill-Mandel thể hiện mối liên hệ giữa hai cấp độ tính toán. Qua đó, các thông số đặc trưng vật

liệu được xác định như: mô đun đàn hồi hữu hiệu E_{eff} , hệ số nở hông hữu hiệu ν_{eff} , mô đun đàn hồi kháng trượt hữu hiệu G_{eff} , mô đun đàn hồi khối hữu hiệu K_{eff} và đặc biệt là hàm tiêu chuẩn dẻo hữu hiệu của vật liệu. Điều kiện biên tuần hoàn của bài toán vi mô được xây dựng qua mối liên hệ giữa các bậc tự do của các nút đối xứng trên biên. Phương pháp được sử dụng để khử ràng buộc này là nén bậc tự do (condense) nhằm đạt được tính ổn định của kết quả số.

2.2.1 Phần tử đơn vị thể tích đại diện RVE

Việc xem xét một khối vật thể không đồng nhất liên tục $\Omega \in \mathbb{R}^3$ được thay thế bằng một khối đồng nhất liên tục $\Omega_M \in \mathbb{R}^3$ tương đương. Mỗi điểm vật liệu sẽ được đại diện bằng một kết cấu vi mô không đồng nhất $\Omega_m \in \mathbb{R}^3$.



Hình 2.7: Mối liên hệ giữa bài toán cấp độ vi mô và bài toán cấp độ vĩ mô.

Kích thước bài toán vi mô $l_{vi\ mô}$ nhỏ hơn nhiều lần so với kích thước bài toán vĩ mô $l_{vĩ\ mô}$ nên khi tính toán tại cấp độ vi mô thì thành phần lực thể tích có thể bỏ qua. Phương trình cân bằng của bài toán cấp độ vi mô được thể hiện qua biểu thức sau

$$\nabla \sigma_m = 0 \text{ trong } \Omega_m \quad (2.23)$$

Với σ_m là ứng suất đàn hồi của bài toán ở cấp độ vi mô. Kích thước của phần tử đại diện (RVE) cần đảm bảo hai điều kiện sau:

- + Đủ lớn để có thể mô tả được đặc trưng về cấu tạo của vật liệu.
- + Đủ nhỏ để có thể thoả mãn các yếu tố giảm yếu trong bài toán.

2.2.2 Định lý trung bình thể tích

Mối liên hệ của bài toán cấp độ vi mô và bài toán cấp độ vĩ mô được thể hiện qua định lý trung bình. Định lý trung bình theo biến dạng nhỏ được đề cập bởi Hill (1963) và được mở rộng cho biến dạng lớn bởi Hill (1984) và Nemat-Nasser (1999).

Tensor biến dạng vĩ mô ϵ_M bằng trung bình thể tích của tensor biến dạng vi mô ϵ_m

$$\epsilon_M = \frac{1}{\Omega_m} \int_{\Omega_m} \epsilon_m dV_m \quad (2.24)$$

Tensor ứng suất vĩ mô σ_M được tính bằng trung bình thể tích của tensor ứng suất vi mô σ_m

$$\sigma_M = \frac{1}{\Omega_m} \int_{\Omega_m} \sigma_m dV_m \quad (2.25)$$

Ứng suất tại cấp độ vi mô được thể hiện qua các biểu thức sau

$$\nabla \mathbf{X} = \mathbf{I} \quad (2.26)$$

Từ (2.23) và (2.26) ta xây dựng được mối liên hệ sau

$$\nabla (\sigma_m \mathbf{X}) = (\nabla \sigma_m) \mathbf{X} + (\nabla \mathbf{X}) \sigma_m = \sigma_m \quad (2.27)$$

Áp dụng (2.27) vào định lý trung bình (2.25) ta có

$$\sigma_M = \frac{1}{V_m} \int_{\Omega_m} \nabla (\sigma_m \mathbf{X}) dV_m = \frac{1}{V_m} \int_{\Gamma_m} \mathbf{n} \sigma_m \mathbf{X} d\Gamma_m = \frac{1}{V_m} \int_{\Gamma_m} \mathbf{f} \mathbf{X} d\Gamma_m = \frac{1}{V_m} \sum_{i=1}^{N_p} f_i X_i \quad (2.28)$$

Với f_i là lực trên nút i trên biên, X_i là tọa độ của nút i trên biên và N_p là tổng số bậc tự do trên biên.

2.3 Lý thuyết phân tích giới hạn

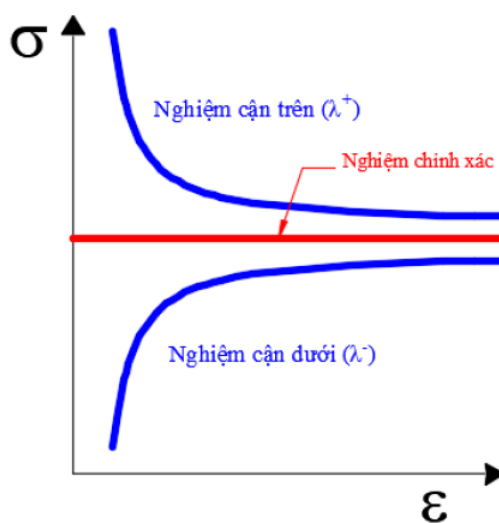
Chúng ta hãy xem xét một vật thể V với vật liệu cứng-dẻo lý tưởng có các biên động học ($\bar{u} = 0$ trên Γ_u). Giả sử vật thể chịu tác dụng tải trọng ngoại lực (f, t) và được tăng tải dần với hệ số tải trọng λ và được viết lại $(\lambda f, \lambda t)$. Khi giá trị λ nhỏ, vật thể ứng xử đàn hồi và chưa xuất hiện biến dạng dẻo. Khi hệ số λ tăng dần lên

và đạt đến giá trị đáng kể, một số vùng dẻo xuất hiện tại một số vị trí của vật thể nhưng chưa hình thành cơ cấu gây nên trạng thái sụp đổ. Sự gia tăng λ , vùng dẻo phát triển cho đến khi hình thành cơ cấu phá hoại và gây phá hoại. Tải trọng khi đó được gọi là tải trọng giới hạn tương ứng với hệ số tải trọng giới hạn λ .

Tải trọng giới hạn tìm được bằng lý thuyết phân tích trực tiếp tại trạng thái giới hạn sẽ khác với tải trọng phá hoại dẻo thực sự xảy ra trong kết cấu. Ở đây, chúng ta chỉ tính toán tải trọng giới hạn trên một kết cấu lý tưởng, mà trong đó biến dạng có thể tăng lên mãi trong khi tải trọng giữ nguyên không đổi. Do vậy việc tính toán bằng lý thuyết phân tích trực tiếp giới hạn được dựa trên các giả thiết sau:

- + Vật liệu được xem như dẻo lý tưởng (bỏ qua hiện tượng tái bền và mềm hóa).
- + Biến dạng của kết cấu được xem là bé.

Bài toán phân tích giới hạn có thể được giải quyết theo hai hướng tiếp cận như là phương pháp cận trên (xấp xỉ bằng trường biến dạng) và phương pháp cận dưới (xấp xỉ bằng trường ứng suất).



Hình 2.8: Nghiệm cận trên và cận dưới trong bài toán phân tích giới hạn.

Trường ứng suất khả dĩ tĩnh là trường ứng suất thỏa mãn điều kiện cân bằng bên trong vật thể và điều kiện cân bằng trên biên tĩnh học.

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \bar{f}_i = 0 \text{ trong } \Omega \quad (2.29a)$$

$$n_j \sigma_{ij} = \bar{t}_i \text{ trên } \Gamma_t \quad (2.29b)$$

Trường ứng suất được xem là hợp lệ khi trường ứng suất đó thoả điều khả dĩ tĩnh và không có điểm vật liệu bên trong vi phạm tiêu chuẩn dẻo.

Trường vận tốc chuyển vị khả dĩ động là trường chuyển vị mà chúng thoả điều kiện tương thích bên trong vật thể và điều kiện biên động học trên biên động học Γ_u .

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \text{ trong } \Omega \quad (2.30a)$$

$$u_i = \bar{u}_i \text{ trên } \Gamma_u \quad (2.30b)$$

Trường chuyển vị u_{ij} , biến dạng ϵ_{ij} được xem là hợp lệ khi chúng vừa thoả điều kiện khả dĩ động và đảm bảo điều kiện công ngoại dương.

$$\int \bar{f}_i^0 u_i^1 dV + \int \bar{t}_i^0 u_i^1 dS \geq 0 \quad (2.31)$$

Định đề 2.3.1 *Khi tải trọng đạt trạng thái giới hạn và biến dạng xảy ra dưới tải trọng không đổi, tất cả ứng suất luôn là hằng số; chỉ có gia số biến dạng dẻo xảy ra (không phải biến dạng đàn hồi).*

Định lý này đã đưa ra "các trạng thái đàn hồi không tham gia vào trạng thái phá hoại ở trạng thái giới hạn". Do đó, việc sử dụng các quan hệ vận tốc ứng suất và biến dạng trong trường hợp đàn dẻo lý tưởng cũng giống như sử dụng các quan hệ trên trong trường hợp vật liệu được xem là cứng dẻo lý tưởng.

Định đề 2.3.2 *Nếu một trường ứng suất cân bằng σ_{ij}^s có thoả mãn điều kiện cân bằng về các lực thể tích \bar{f}_i trong V và các lực mặt \bar{t}_i trên Γ_t và không có điểm vật liệu vi phạm tiêu chuẩn chảy dẻo ($f(\sigma_{ij}^s) < 0$). Khi đó, vật thể dưới tác dụng của các tải trọng \bar{f}_i và \bar{t}_i sẽ không bị phá huỷ*

Hay "hệ số tải trọng giới hạn cận dưới là cực đại trong số các tải trọng λ^- trong tập hợp các trường hợp trường ứng suất hợp lệ σ_{ij}^s ".

Định đề 2.3.3 *Nếu cơ cấu biến dạng dẻo tương thích (ϵ_{ij}, u_{ij}) có thể giả định trước sao cho thoả điều kiện biên động học ($u_{ij} = 0$ trên Γ_u), khi đó các tải trọng \bar{f}_i và \bar{t}_i sẽ được xác định khi cân bằng công suất ngoại*

$$W_E = \int_{\Gamma_t} \bar{t}_i u_{ij} dS + \int_{\Omega} \bar{f}_i u_{ij} dV \quad (2.32)$$

Với công suất tiêu tán dẻo

$$W_I = \int_{\Omega} D(\epsilon_{ij}) dV = \int_{\Omega} \epsilon_{ij} dV \quad (2.33)$$

sẽ lớn hơn hoặc bằng tải trọng giới hạn.

Hệ số tải trọng giới hạn λ là số nhỏ nhất trong các hệ số tải trọng λ^+ tương ứng với các trường chuyển vị u_{ij} khả dĩ động.

Định đề 2.3.4 Với mọi trường chuyển vị hay trường biến dạng hợp lệ, ta được hệ số tải trọng giới hạn cận dưới λ^- và trường vận tốc biến dạng liên hiệp với hệ số tải trọng giới hạn cận trên λ^+ bởi luật chảy dẻo thì $\lambda^+ = \lambda^- = \lambda$.

Bài toán cận dưới được xây dựng và rời rạc hoá phần tử theo trường ứng suất.

$$\lambda^- = \max \lambda \quad \text{s.t} \begin{cases} f(\sigma_{ij}) \leq 0 \\ \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \lambda f_i = 0 \text{ trong } V \\ n_j \sigma_{ij} = \lambda g \text{ trên } \Gamma_t \end{cases} \quad (2.34)$$

Bài toán cận trên được xây dựng và rời rạc hóa phần tử theo trường chuyển vị.

$$\lambda^+ = \min \int \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV \quad \text{s.t} \begin{cases} W_{ext}(\mathbf{u}) = 1 \\ \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \text{ trong } \Omega \\ \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}_i \text{ trên biên } \Gamma_u \end{cases} \quad (2.35)$$

2.3.1 Hàm năng lượng tiêu tán dẻo của vật liệu

Tiêu chuẩn von Mises và Hill

Hàm tiêu chuẩn chảy dẻo bậc hai được sử dụng phổ biến được thể hiện

$$\Psi_H(\sigma) = \sqrt{\sigma^T \mathbf{P} \sigma} - 1 \quad (2.36)$$

Với \mathbf{P} là ma trận hệ số của hàm dẻo vật liệu.

Trường hợp sử dụng tiêu chuẩn von Mises vật cho liệu vi mô và điều kiện ứng suất phẳng, ma trận P được thể hiện sau

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\sigma_0^2} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

Với σ_0 là ứng suất chảy dẻo kéo dọc trục.

Trường hợp vật liệu không đồng nhất của Hill, ma trận hệ số P được thể hiện

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} G + H & -H & 0 \\ -H & H + F & 0 \\ 0 & 0 & 3 \times N \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

Với các hệ số G,H,F và N là các hằng số vật liệu của vật liệu bất đẳng hướng. Chúng được xác định qua công thức

$$\left\{ \begin{array}{l} 2G = \frac{1}{\Sigma_{pz}^2} + \frac{1}{\Sigma_{px}^2} - \frac{1}{\Sigma_{py}^2} \\ 2H = \frac{1}{\Sigma_{px}^2} + \frac{1}{\Sigma_{py}^2} - \frac{1}{\Sigma_{pz}^2} \\ 2F = \frac{1}{\Sigma_{py}^2} + \frac{1}{\Sigma_{pz}^2} - \frac{1}{\Sigma_{px}^2} \\ N = \frac{1}{3\Sigma_{pxy}^2} \end{array} \right. \quad (2.39)$$

Với Σ_{px} , Σ_{py} , Σ_{pz} lần lượt là ứng suất chảy dẻo kéo dọc trục x, y, z và Σ_{pxy} là ứng suất cắt chảy dẻo của vật liệu bất đẳng hướng.

Trong nghiên cứu về bài toán phân tích giới hạn cận trên, năng lượng tiêu tán dẻo cần được xác định thông qua tiêu chuẩn chảy dẻo áp dụng tương ứng.

$$D(\epsilon) = \sigma^P \int_{\Omega} \sqrt{\epsilon^T \Theta \epsilon} \, d\Omega \quad (2.40)$$

Với $\Theta = \mathbf{P}^{-1}$

Tiêu chuẩn Tsai

Hàm dẻo theo tiêu chuẩn Tsai cho vật liệu không đồng nhất có dạng sau

$$\Psi_T(\sigma) = \sigma^T \mathbf{P} \sigma + \sigma^T \mathbf{Q} - 1 \quad (2.41)$$

Với các ma trận hệ số \mathbf{P} và \mathbf{Q} đặc trưng cho các loại vật liệu bất đẳng hướng khác nhau.

Khi áp dụng định luật chảy dẻo kết hợp cho hàm chảy dẻo, biến dạng dẻo được xác định theo công thức

$$\epsilon^P = \mu \frac{\partial \psi(\sigma)}{\partial \sigma} = 2\mu \mathbf{P} \sigma + \mu \mathbf{Q} \quad (2.42)$$

Khi đó, ứng suất tại mặt chảy dẻo có thể biểu diễn là một hàm của biến dạng dẻo như sau

$$\sigma = \frac{1}{2\mu} \mathbf{P}^{-1} \epsilon^P - \frac{1}{2} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{Q} \quad (2.43)$$

Ma trận vật liệu \mathbf{P} phải xác định dương hoặc bán xác định, và \mathbf{P}^{-1} có thể xác định khi ma trận \mathbf{P} không suy biến.

Trong phương pháp cận trên, trường chuyển vị được xấp xỉ nên các biến của năng lượng tiêu tán dẻo cần chuyển về theo trường động học. Điều này được thực hiện thông qua việc xác định hệ số chảy dẻo từ (2.42) và (2.43)

$$\mu = \sqrt{\frac{(\epsilon^P)^T \mathbf{P}^{-1} \epsilon^P}{4 + \mathbf{Q}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{Q}}} \quad (2.44)$$

Sau đó, năng lượng tiêu tán dẻo cho vật liệu không đồng nhất tuân theo tiêu chuẩn Tsai có thể được biểu diễn như sau

$$\begin{aligned} D(\epsilon^P) &= \sigma^T \epsilon^P = \left(\frac{1}{2\mu} \mathbf{P}^{-1} \epsilon^P - \frac{1}{2} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{Q} \right)^T \epsilon^P \\ &= \frac{1}{2\mu} (\epsilon^P)^T \mathbf{P}^{-1} \epsilon^P - \frac{1}{2} (\epsilon^P)^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{Q} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(4 + \mathbf{Q}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{Q})} ((\epsilon^P)^T \mathbf{P}^{-1} \epsilon^P) - \frac{1}{2} (\epsilon^P)^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{Q} \end{aligned} \quad (2.45)$$

2.3.2 Định nghĩa bài toán tối ưu hóa hình nón bậc hai (SOCP)

\mathbb{K} được gọi là một nón nếu $\forall x \in \mathbb{K}$ và $\lambda \geq 0$ thì $\lambda x \in \mathbb{K}$

Nón đối ngẫu của \mathbb{K} là \mathbb{K}^* được định nghĩa như sau:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{y} \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{K} \Leftrightarrow \mathbf{y} \in \mathbb{K}^* \quad (2.46)$$

Nếu $\mathbb{K}^* \equiv \mathbb{K}$ thì ta gọi \mathbb{K} là nón tự đối ngẫu.

Nón bậc hai (quadratic or second order cone) được định nghĩa

$$\mathbb{K}_q^{(n)} = \{\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n: \mathbf{x}_1 \geq \|\mathbf{x}_{2:n}\|, \mathbf{x}_1 \geq 0\}; \text{ với } \|\mathbf{x}_{2:n}\| = \sqrt{\sum_{i=2}^n x_i^2} \quad (2.47)$$

Hình nón bậc hai xoay trục (rotated quadratic cone) được định nghĩa

$$\mathbb{K}_r^{(n)} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n: 2\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \geq \|\mathbf{x}_{3:n}\|^2; \text{ với } \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \geq 0 \right\} \quad (2.48)$$

Bài toán tối ưu hình nón bậc hai được khai báo qua công cụ mosek:

$$\lambda^+ = \min \sum_{i=1}^N c_i^T x_i + c_f^T x_f \quad (2.49a)$$

$$\text{s.t} \quad S_i \in \mathbb{K} \quad \forall i \in \{1, \dots, N\} \quad (2.49b)$$

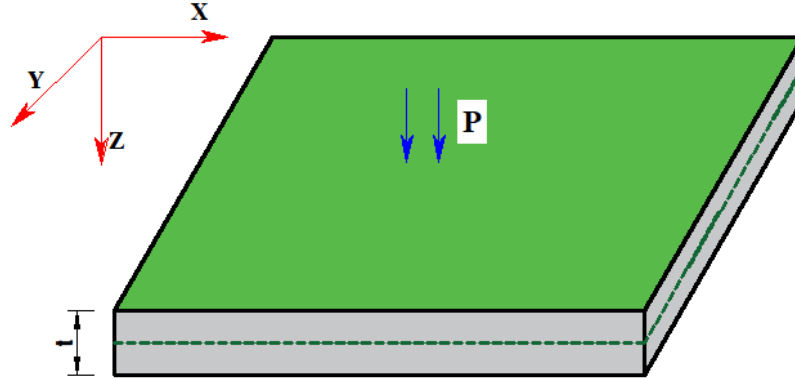
$$\mathbf{A}_i \mathbf{x}_i + \mathbf{A}_f \mathbf{x}_f = \mathbf{b} \quad (2.49c)$$

Với biến tham gia vào bài toán bao gồm biến tự do x_f và biến hình nón x_i .

2.4 Lý thuyết tấm

2.4.1 Tấm mỏng Kirchoff chịu uốn

Bài toán tấm sàn thực tế thường rơi vào trường hợp tấm mỏng (thin plate) hay thường được gọi là lý thuyết tấm cổ điển (Classic Plate Theory-CPT)



Hình 2.9: Kết cấu tấm mỏng Kirchoff chịu uốn.

Xem xét một tấm sàn cứng-dẻo tuyệt đối có chiều dày phân bố đều t với điều kiện biên cong khép kín diện tích phẳng Ω bao gồm biên động học Γ_u và biên tĩnh học Γ_t đồng thời chịu tải trọng phân bố q .

Ứng xử của tấm mỏng (CPT) có thể được phân tích dưới giả thuyết của Kirchoff rằng trước và sau khi biến dạng mặt cắt vẫn vuông góc với mặt trung bình của tấm và chiều dài của mặt trung bình không thay đổi.

Mối quan hệ về chuyển vị và biến dạng của tấm có thể biểu diễn như sau

$$\epsilon = z\kappa \quad (2.50)$$

Với vectơ biến dạng ϵ và độ cong κ được định nghĩa

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{xy} \end{bmatrix}^T \quad (2.51)$$

$$\kappa = \begin{bmatrix} \kappa_{xx} & \kappa_{yy} & 2\kappa_{xy} \end{bmatrix}^T \quad (2.52)$$

Mối liên hệ giữa chuyển vị u và biến dạng κ được thể hiện như sau

$$\kappa = -\nabla^2 \mathbf{u} = \mathbf{L}u \quad (2.53)$$

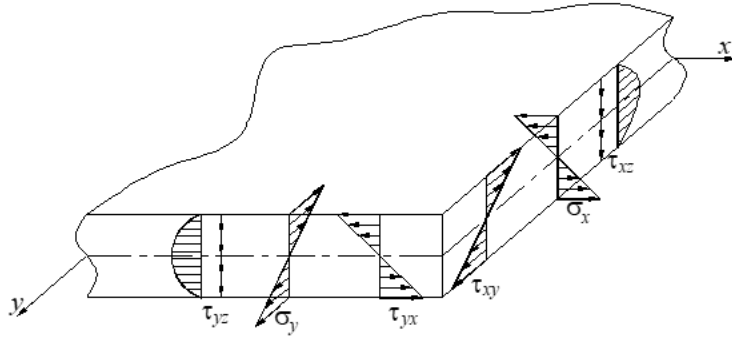
Với Ma trận L được định nghĩa

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2}{\partial x^2} & -\frac{\partial^2}{\partial y^2} & -2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}^T \quad (2.54)$$

Vectơ moment \mathbf{m} trên một đơn vị chiều rộng của tấm, được định nghĩa

$$\mathbf{m} = \begin{Bmatrix} m_{xx} \\ m_{yy} \\ m_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} z dz = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \boldsymbol{\sigma} z dz \quad (2.55)$$

Qui ước dấu của ứng suất trong tấm được thể hiện



Hình 2.10: Qui ước dấu ứng suất trong tấm.

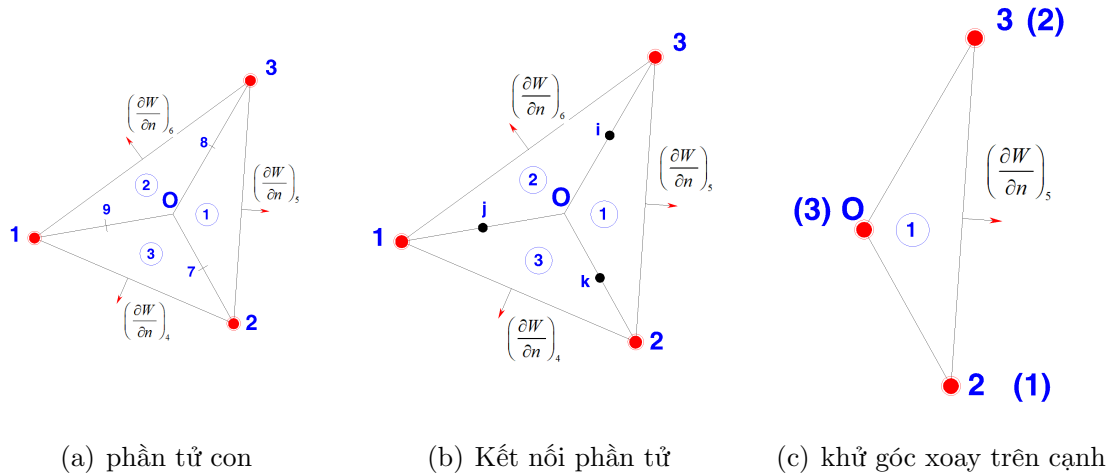
Năng lượng tiêu tán dẻo hay công nội năng trên một đơn vị diện tích của tấm

$$D_{\text{Tấm}} = m_{xx}\kappa_{xx} + m_{yy}\kappa_{yy} + 2m_{xy}\kappa_{xy} \quad (2.56)$$

2.4.2 Phần tử tấm chịu uốn Hsieh-Clough-Tocher

Phương pháp phần tử Hsieh-Clough-Tocher (HCT) là phần tử tương thích C^1 với hàm xấp xỉ bậc ba trong tọa độ địa phương của phần tử. Phần tử HCT sẽ được sử dụng để rời rạc hóa trường chuyển vị cho bài toán. Đặc điểm nổi bật của phần tử HCT là điểm trọng tâm tấm được thêm vào để chia nhỏ thành ba tam giác bên trong. Sau đó, ba bậc tự do tại trọng tâm được khử thông qua điều kiện liên tục của ba cạnh bên trong. Điều này giúp cho phần tử HCT có thể đảm bảo độ chính xác tương đương với việc chia ba phần tử nhưng lại giảm được ba bậc tự do tại trọng tâm tấm trong quá trình tính toán.

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \mathbf{d} \quad (2.57)$$



Hình 2.11: Phần tử tương thích C^1 HCT với 12 bậc tự do

Với \mathbf{N} là hàm dạng Hermitian. \mathbf{d} là các bậc tự do tại nút. Xác định của hàm dạng từ trường tương thích bao gồm phần tử tam giác tương thích, bằng việc sử dụng chỉ một sự mở rộng bậc ba, tam giác được chia làm ba tam giác bên trong như hình 2.11. Điểm O là trọng tâm của tam giác ban đầu và ba tam giác con được đánh số tương ứng với con số góc đối diện. Số của tam giác con được định nghĩa trong biểu thức đại số.

Phần tử có 12 bậc tự do bao gồm :

- + Độ võng tại các đỉnh tam giác w_i với $i=1,2,3$
- + Hai góc xoay tại mỗi nút $\theta_{xi} = \frac{\partial w_i}{\partial x_i}$ và $\theta_{yi} = \frac{\partial w_i}{\partial y_i}$ với $i=1,2,3$
- + Góc xoay tại điểm giữa các cạnh $\theta_i = \frac{\partial w_i}{\partial n_i}$ với $i=4,5,6$.

Chuyển vị $w(x, y)$ được xấp xỉ trên mỗi phần tử tam giác con

$$w^{(k)}(x, y) = \mathbf{N}^{(k)}(x, y)\mathbf{d}^{(k)}, \text{ với } k = 1, 2, 3 \quad (2.58)$$

với \mathbf{d} là chuyển vị nút của toàn bộ phần tử

$$\mathbf{d} = \left[w_1 \quad \theta_{x1} \quad \theta_{y1} \quad w_2 \quad \theta_{x2} \quad \theta_{y2} \quad w_3 \quad \theta_{x3} \quad \theta_{y3} \quad w_o \quad \theta_{xo} \quad \theta_{yo} \right]^T = \left[\mathbf{d}_R^T \quad \mathbf{d}_E \right]^T \quad (2.59)$$

Với \mathbf{d}_R là các bậc tự do tại các đỉnh của phần tử tam giác và \mathbf{d}_E là các bậc tự do tại trọng tâm tam giác. Rời rạc hóa phần tử bằng hàm chuyển vị đứng nên góc

xoay trên các cạnh phải có dạng

$$w_n^{(k)} |_i = \left[B_i^{(k)} B_0^{(k)} \right] \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_R \\ \mathbf{d}_E \end{Bmatrix}, k = 1, 2, 3; i = 7, 8, 9 \quad (2.60)$$

Từ các điều kiện liên tục góc xoay w_n tại các cạnh 7,8,9

$$\begin{aligned} w_n^{(1)} |_7 &= -w_n^{(3)} |_7 \\ w_n^{(1)} |_8 &= -w_n^{(2)} |_8 \\ w_n^{(2)} |_9 &= -w_n^{(3)} |_9 \end{aligned} \quad (2.61)$$

Phương trình cân bằng từ điều kiện tương thích

$$\mathbf{Bd}_R + \mathbf{B}_0 \mathbf{d}_E = \mathbf{0} \quad (2.62)$$

Nên ta có mối quan hệ giữa chuyển vị tại trọng tâm và chuyển vị tại các góc

$$\mathbf{d}_E = -\mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{Bd}_R = \mathbf{Cd}_R \quad (2.63)$$

Công thức 2.60 được viết lại

$$\begin{bmatrix} w^{(1)} \\ w^{(2)} \\ w^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_e^{(1)} + N_0^{(1)} C \\ N_e^{(2)} + N_0^{(2)} C \\ N_e^{(3)} + N_0^{(3)} C \end{bmatrix} \mathbf{d}_R \quad (2.64)$$

chuyển vị $w^{(k)}$ được biểu diễn dưới hệ tọa độ tự nhiên $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ cho mỗi phần tử tam giác con

$$w^{(k)}(\zeta) = \left(N_e^{(k)}(\zeta) + N_o^{(k)}(\zeta) C \right) \mathbf{d}_R \quad (2.65)$$

Với $N_e^{(k)}(\zeta), N_o^{(k)}(\zeta)$ lần lượt là hàm nội suy với các biến được xây dựng bởi các biến chuyển vị tại các nút ở bên ngoài \mathbf{d}_R và chuyển vị nút bên trong \mathbf{d}_E . \mathbf{C} là ma trận biểu diễn mối quan hệ của chuyển vị tại nút bên trong và chuyển vị tại các nút bên ngoài. Ma trận \mathbf{C} được sử dụng để khử các chuyển vị nút bên trong thông qua điều kiện liên tục trên cạnh của 3 phần tử con trên biên 7,8,9.

Xác định góc xoay giữa các cạnh 4,5,6 là phức tạp. Tuy nhiên, nếu xem độ dốc pháp tuyến thay đổi tuyến tính theo cạnh thì nút giữa được khử khi góc xoay tại nút giữa ij là trung bình cộng của góc xoay nút i và nút j :

$$\theta_k = \theta_{xk} \cos(\alpha_{ij}) + \theta_{yk} \sin(\alpha_{ij}) = \left(\frac{\theta_{xi} + \theta_{xj}}{2} \right) \cos(\alpha_{ij}) + \left(\frac{\theta_{yi} + \theta_{yj}}{2} \right) \sin(\alpha_{ij}) \quad (2.66)$$

Với $k = 4, 5, 6$ và α_{ij} là góc giữa các cạnh $ij = 23, 31, 12$.

Vì vậy phần tử HCT chỉ còn lại 9 bậc tự do và đạt được sự tương thích về độ dốc pháp tuyến dọc theo các cạnh biên.

Chương 3

Bài toán đa tỉ lệ đàn hồi với phần tử đại diện tấm phẳng hai chiều

3.1 Giới thiệu

Khi xem xét ứng xử của vật liệu nằm trong miền đàn hồi, việc xác định các hằng số đàn hồi hữu hiệu cho vật liệu đa thành phần là cần thiết trong tính toán cơ học và kỹ thuật. Một phương pháp giải tích thường được sử dụng để ước lượng một cách nhanh chóng đó là phương pháp cận. Cận trên được cung cấp bởi Voigt [1] được xây dựng trên nguyên lý cực tiểu thế năng biến dạng đàn hồi với trường ứng suất hằng số. Cận dưới được cung cấp bởi Reuss [2] được xây dựng trên nguyên lý cực tiểu thế năng biến dạng đàn hồi với trường chuyển vị hằng số. Cận trên và cận dưới được đề xuất bởi Hashi-Shtrikman [3] xây dựng trên nguyên lý biến phân. Tuy nhiên, phương pháp cận chỉ xác định được các giới hạn sự thay đổi của hằng số vật liệu hữu hiệu của vật liệu đa thành phần. Đặc biệt khi sự chênh lệch giữa các pha vật liệu này càng lớn thì biên độ dao động của cận trên và cận dưới càng lớn. Bên cạnh đó, việc phân bố cụ thể hình dạng và cấu trúc của các pha vật liệu chưa được kể đến.

Với sự phát triển về ngành công nghệ vật liệu ngày nay, phương pháp chụp cắt lớp XRAY nhằm xác định chính xác sự phân bố các pha vật liệu khác nhau trong kết cấu được chú ý nhiều hơn. Điều này tạo cơ hội cho các nghiên cứu mô phỏng phần tử hữu hạn ở nhiều cấp độ (tỉ lệ vi mô và tỉ lệ vĩ mô) phát triển. Bài toán tỉ lệ vi mô sẽ mô tả các cấu trúc phân bố của các pha vật liệu khác nhau. Sau đó, kỹ thuật đồng nhất hoá được sử dụng nhằm tìm ra được các thông số đàn hồi hữu hiệu cho bài toán ở tỉ lệ vĩ mô. Trong chương này, các hằng số vật liệu hữu hiệu của các loại vật liệu khác nhau, như là vật liệu cốt sợi chữ nhật, vật liệu cốt sợi tròn, vật liệu lỗ rỗng tròn, vật liệu có cơ lý biến thiên và vật liệu đa tinh thể dị hướng được xác định thông qua kỹ thuật đồng nhất trong bài toán tấm phẳng vi mô. Hai

điều kiện biên được xem xét là biên tuần hoàn và biên tuyến tính. Kết quả thu được sẽ được so sánh với các nghiên cứu giải tích và mô phỏng số khác.

3.2 Điều kiện biên trong bài toán tấm phẳng vi mô đàn hồi

Trong bài toán vi mô, biến dạng ở cấp độ vĩ mô được sẽ được áp đặt thành điều kiện biên động học cho bài toán cấp độ vi mô. Các phương pháp khác nhau đã được thực hiện với điều kiện biên tuần hoàn cho tấm phẳng như Miehe [22]; Kouznetsova [57]; Molina [58].

Trường chuyển vị tổng quát bao gồm trường chuyển vị hằng số $\bar{\mathbf{u}}$ và trường biến thiên $\tilde{\mathbf{u}}$

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\epsilon}_{xx} & \bar{\epsilon}_{xy} \\ \bar{\epsilon}_{yx} & \bar{\epsilon}_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{Bmatrix} \quad (3.1)$$

Với X_1, X_2 là tọa độ của các điểm trong bài toán phần tử đại diện RVE. \tilde{u}, \tilde{v} là hai chuyển vị biến thiên. $\bar{\epsilon}$ là biến dạng tại một điểm vật liệu vĩ mô.

Khi sử dụng điều kiện biên tuyến tính, các chuyển vị biến thiên bằng 0 trên biên phần tử đại diện.

$$\tilde{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \end{Bmatrix} \text{ trên biên phần tử } \Gamma_d \quad (3.2)$$

Khi sử dụng điều kiện biên tuần hoàn, mối liên hệ giữa các chuyển vị độc lập và chuyển vị phụ thuộc của phần tử đại diện được xây dựng. Chuyển vị độc lập bao gồm chuyển vị tại cạnh dưới, cạnh trái, bốn góc và nút bên trong. Chuyển vị phụ thuộc bao gồm chuyển vị tại cạnh trên và cạnh phải.

$$u_{\text{trên}} - u_{\text{dưới}} = u^4 - u^1 \quad (3.3a)$$

$$v_{\text{trên}} - v_{\text{dưới}} = v^4 - v^1 \quad (3.3b)$$

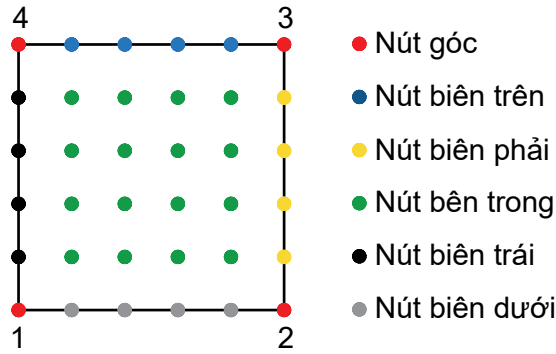
$$u_{\text{phải}} - u_{\text{trái}} = u^2 - u^1 \quad (3.3c)$$

$$v_{\text{phải}} - v_{\text{trái}} = v^2 - v^1 \quad (3.3d)$$

Với $\mathbf{u}^i, \mathbf{v}^i$ lần lượt là chuyển vị tại các nút góc thứ i của phần tử đại diện RVE được thể hiện trong hình 3.1.

Phương trình mối liên hệ tuần hoàn được viết lại dưới dạng ma trận

$$\mathbf{Cu} = \mathbf{0} \quad (3.4)$$



Hình 3.1: Các nút trên biên phần tử đại diện

Ma trận \mathbf{C} là ma trận bao gồm các chỉ số $(1;-1;0)$ thể hiện mối liên hệ của chuyển vị của các bậc tự do độc lập và bậc tự do phụ thuộc trong bài toán tấm phẳng.

Rời rạc hoá bài toán tấm phẳng thành các miền phần tử bằng phương pháp phần tử hữu hạn (FEM). Sau đó, trường chuyển vị trong bài toán cấp độ vi mô được xấp xỉ theo biểu thức sau

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{d}; \quad \epsilon = \mathbf{B}\mathbf{d} \quad (3.5)$$

Trong đó, \mathbf{N} là ma trận hàm dạng của phần tử và \mathbf{B} là ma trận tính biến dạng của phần tử.

Ma trận độ cứng tổng thể \mathbf{K} của bài toán được tính toán như sau

$$\mathbf{K} = \int_A \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dA \quad (3.6)$$

Phương trình tuyến tính hệ thống tổng thể của bài toán tấm phẳng ở cấp độ vi mô

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (3.7)$$

Khi áp dụng điều kiện biên tuyến tính thì ta có thể giải trực tiếp để thu được trường chuyển vị của các nút bên trong thông qua các chuyển vị đã biết trên biên.

Khi áp đặt điều kiện biên tuần hoàn thì ta cần phải khử được các bậc tự do phụ thuộc, sau đó tiến hành giải bài toán vi mô. Kỹ thuật mà được thực hiện để khử ràng buộc này thường sử dụng một trong các phương pháp là rút gọn bậc tự do, hàm phạt và nhân tử Lagrange. Tuy nhiên, khi xem xét về sự ổn định về kết quả số, phương pháp rút gọn bậc tự do đem lại sự ổn định về kết quả hơn. Nên phương pháp này được chọn để thực hiện trong luận văn này.

Điều kiện tuần hoàn \mathbf{C} được sắp xếp lại theo các bậc tự do phụ thuộc \mathbf{u}_d và bậc tự do độc lập \mathbf{u}_i như sau

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}_i & \mathbf{C}_d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{u}_d \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (3.8)$$

Mối liên hệ giữa bậc tự do phụ thuộc \mathbf{u}_d và bậc tự do độc lập \mathbf{u}_i

$$\mathbf{u}_d = -\mathbf{C}_d^{-1}\mathbf{C}_i\mathbf{u}_i = \mathbf{C}_{di}\mathbf{u}_i \quad (3.9)$$

Trong phương pháp này, phương trình tuyến tính hệ thống (3.7) được viết lại

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{K}_{id} \\ \mathbf{K}_{di} & \mathbf{K}_{dd} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{u}_d \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_i \\ \mathbf{f}_d \end{Bmatrix} \quad (3.10)$$

Thế (3.9) Phương trình (3.10) ta được phương trình

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{K}_{id} \\ \mathbf{K}_{di} & \mathbf{K}_{dd} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{C}_{di}\mathbf{u}_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_i \\ \mathbf{f}_d \end{Bmatrix} \quad (3.11)$$

Điểm mạnh của phương pháp này đem lại kết quả tính toán chính xác nhưng các bước tính toán khá phức tạp. Đồng thời phương pháp này sẽ giảm kích thước của ma trận độ cứng giúp giảm bộ nhớ lưu trữ trong các bài toán lớn.

Phương trình tuyến tính (3.11) được rút gọn theo các bậc tự do độc lập

$$\mathbf{K}^* = \mathbf{K}_{ii} + \mathbf{K}_{id}\mathbf{C}_{di} + \mathbf{C}_{di}^T\mathbf{K}_{di} + \mathbf{C}_{di}^T\mathbf{K}_{dd}\mathbf{C}_{di} + \mathbf{C}_{di} \quad (3.12a)$$

$$\mathbf{f}^* = \mathbf{f}_i + \mathbf{C}_{di}^T\mathbf{f}_d \quad (3.12b)$$

$$\mathbf{K}^*\mathbf{u}_i = \mathbf{f}^* \quad (3.12c)$$

3.3 Kỹ thuật đồng nhất hoá bài toán tám phẳng vi mô

Sau khi tính toán bài toán cấp độ vi mô, ma trận hằng số vật liệu hữu hiệu sẽ thỏa mãn biểu thức

$$\sigma_M = \mathbf{D}_M\bar{\epsilon}_M \quad (3.13)$$

Phương trình tuyến tính hệ thống (3.7) được viết lại theo các bậc tự do độc lập sau khi khử các điều kiện biên tuần hoàn

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{aa}^* & \mathbf{K}_{ab}^* \\ \mathbf{K}_{ba}^* & \mathbf{K}_{bb}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_a \\ \mathbf{u}_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_b^* \end{Bmatrix} \quad (3.14)$$

Trong đó, \mathbf{u}_a là chuyển vị tại những nút không nằm ở góc RVE và \mathbf{u}_b là chuyển vị tại những nút nằm tại góc RVE. Sử dụng phương pháp condensation để đưa về theo các bậc tự do ở góc RVE.

$$\mathbf{K}_{bb}^* = \mathbf{K}_{bb} - \mathbf{K}_{ba}\mathbf{K}_{aa}^{-1}\mathbf{K}_{ab} \quad (3.15a)$$

$$\mathbf{K}_{bb}^*\mathbf{u}_b = \mathbf{f}_b^* \quad (3.15b)$$

Trong bài toán tấm phẳng chịu kéo nén, chuyển vị tại mỗi điểm nút ở góc được xác định như sau

$$\bar{\mathbf{u}}_i = \begin{bmatrix} X_1 & 0 & \frac{1}{2}X_2 \\ 0 & X_2 & \frac{1}{2}X_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{12} \end{Bmatrix} = \mathbf{T}_P^i \bar{\epsilon}_M \quad (3.16)$$

Chuyển vị tại các nút góc của phần tử đại diện RVE 2D được xác định

$$\bar{\mathbf{u}}_b = \begin{bmatrix} T_P^1 & T_P^2 & T_P^3 & T_P^4 \end{bmatrix}^T \bar{\epsilon}_M = \mathbf{T}_P \bar{\epsilon}_M \quad (3.17)$$

Ứng suất trung bình thể tích của bài toán vi mô được tính theo công thức (3.15b) và (3.17)

$$\sigma_M = \frac{1}{V} \mathbf{T}_P^T \mathbf{f}_b = \frac{1}{V} \mathbf{T}_P^T \mathbf{K}_{bb}^* \mathbf{u}_b = \frac{1}{V} \mathbf{T}_P^T \mathbf{K}_{bb}^* \mathbf{T}_P \bar{\epsilon}_M \quad (3.18)$$

Đồng nhất công thức (3.18) và công thức(3.13) ta được ma trận hằng số vật liệu hữu hiệu.

$$\mathbf{D}_M = \frac{1}{V} \mathbf{T}_P^T \mathbf{K}_{bb}^* \mathbf{T}_P \quad (3.19)$$

3.4 Mô đun đàn hồi hữu hiệu của tấm phẳng vi mô

Trường hợp hai pha vật liệu, cận trên của Voigt [1] được xác định như sau

$$\begin{aligned} K_V &= V_1 \times K_1 + V_2 \times K_2 \\ G_V &= V_1 \times G_1 + V_2 \times G_2 \end{aligned} \quad (3.20)$$

Với K_1, K_2 là mô đun đàn hồi khối của vật liệu thứ nhất và thứ hai.

G_1, G_2 là mô đun kháng trượt của vật liệu thứ nhất và thứ hai.

V_1, V_2 là thể tích của vật liệu thứ nhất và thứ hai.

Trường hợp hai pha vật liệu, cận dưới của Reuss [2] được xác định như sau

$$\begin{aligned}\frac{1}{K_R} &= \frac{V_1}{K_1} + \frac{V_2}{K_2} \\ \frac{1}{G_R} &= \frac{V_1}{G_1} + \frac{V_2}{G_2}\end{aligned}\quad (3.21)$$

Cận trên và cận dưới được đề xuất bởi Hashi-Shtrikman [3] xây dựng trên nguyên lý biến phân.

$$\begin{aligned}\frac{K_{hs}^L - K_1}{K_2 - K_1} &= \frac{V_2}{1 + (1 - V_2) \times \frac{K_2 - K_1}{K_1 + \frac{4 \times G_1}{3}}} \\ \frac{K_{hs}^U - K_1}{K_2 - K_1} &= \frac{V_2}{1 + (1 - V_2) \times \frac{K_2 - K_1}{K_1 + \frac{4 \times G_2}{3}}} \\ \frac{G_{hs}^L - G_1}{G_2 - G_1} &= \frac{V_2}{1 + (1 - V_2) \times \frac{G_2 - G_1}{G_1 + f_1}} \\ \frac{G_{hs}^U - G_1}{G_2 - G_1} &= \frac{V_2}{1 + (1 - V_2) \times \frac{G_2 - G_1}{G_1 + f_2}}\end{aligned}\quad (3.22)$$

Với f_1 và f_2 được xác định theo công thức sau

$$\begin{aligned}f_1 &= \frac{G_1 \times (9 \times K_1 + 8 \times G_1)}{6 \times (K_1 + 2 \times G_1)} \\ f_2 &= \frac{G_2 \times (9 \times K_2 + 8 \times G_2)}{6 \times (K_2 + 2 \times G_2)}\end{aligned}\quad (3.23)$$

Các thông số mô đun đàn hồi khối hữu hiệu K_{eff} và mô đun đàn hồi trượt hữu hiệu G_{eff} được trung bình hóa thể tích được xác định qua ma trận vật liệu hữu hiệu \mathbf{D}_M

$$K_{eff} = \frac{1}{2}(D_{11} + D_{12}) \quad (3.24)$$

$$G_{eff} = D_{33} \quad (3.25)$$

Mô đun đàn hồi hữu hiệu Young theo hai phương (E_{11} và E_{22}) và hệ số nở hông hữu hiệu theo hai phương (ν_{12} và ν_{21}) xác định theo công thức sau

$$\nu_{12} = \frac{D_{12}}{D_{22}} \quad (3.26a)$$

$$\nu_{21} = \frac{D_{12}}{D_{11}} \quad (3.26b)$$

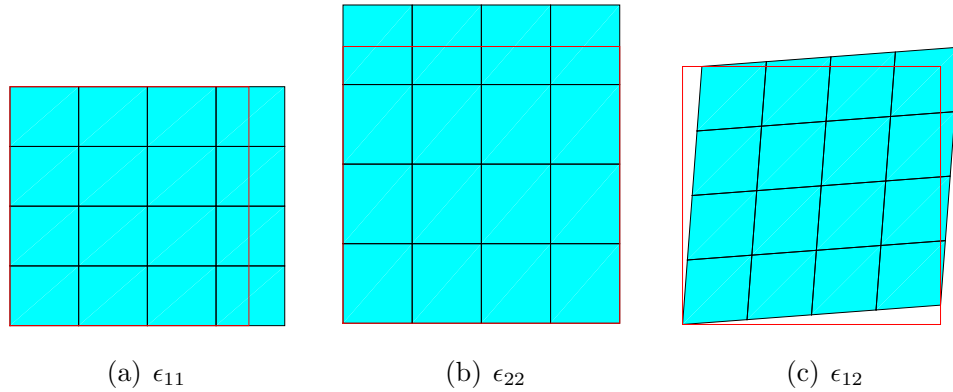
$$E_{11} = D_{11} \times (1 - \nu_{12} \times \nu_{21}) \quad (3.26c)$$

$$E_{22} = D_{22} \times (1 - \nu_{12} \times \nu_{21}) \quad (3.26d)$$

Qua đó, các hằng số vật liệu đàn hồi của vật liệu không đồng nhất của cấp độ vi mô đã được trung bình hoá thể tích thành các hằng số vật liệu đàn hồi hữu hiệu để tính toán ở cấp độ vĩ mô.

3.5 Các mode chuyển vị của bài toán tấm phẳng

Chuyển vị tương ứng trong bài toán phần tử đại diện của tấm phẳng chịu kéo nén như sau



Hình 3.2: Các mode chuyển vị tấm phẳng với các biến dạng từ cấp độ vĩ mô.

Trong hình 3.2, các mode chuyển vị của cấp độ vi mô với các biến dạng cấp độ vĩ mô tương ứng bao gồm ϵ_{11} (biến dạng kéo dọc trục phương x), ϵ_{22} (biến dạng kéo dọc trục phương y) và ϵ_{12} (biến dạng trượt).

Khi xem xét điều kiện biên tuyến tính thì các biên luôn thẳng với các bố trí vật liệu khác nhau. Điều này chưa phù hợp với các bố trí vật liệu không đồng nhất. Trường hợp điều kiện biên tuần hoàn thì biên chuyển vị có thể cong với hình dạng tuần hoàn (gia số về chuyển vị tổng trên các nút đối xứng của hai biên đối diện nhau là hằng số hay được thể hiện bằng gia số chuyển vị của các nút ở góc). Tuy nhiên, khi xem xét vật liệu đồng nhất thì cả hai điều kiện biên đều đưa ra một trường chuyển vị giống nhau.

3.6 Ví dụ số tấm phẳng vi mô

3.6.1 Vật liệu có cốt sợi hình chữ nhật

Trong các cấu kiện thực tế, cốt sợi gia cường được trộn vào các cấu kiện tấm nhằm cải thiện khả năng chịu lực của kết cấu. Vì vậy, phần ví dụ số này sẽ xem xét ảnh hưởng của hai trường hợp cốt sợi ngắn (từng sợi ngắn riêng rẽ) và cốt sợi dài (các sợi dài xuyên suốt cấu kiện) đến ứng xử của kết cấu. Qua đó, đánh giá sự hiệu quả của hai phương pháp khi thêm cốt sợi này vào kết cấu tấm phẳng chịu kéo nén. Hai mẫu RVE được xem xét là mẫu cốt sợi dài và mẫu cốt sợi ngắn như hình vẽ. Mẫu RVE hình vuông có chiều dài là 1 đơn vị. Trong hình 3.3(a) là mẫu cốt sợi ngắn với phần màu đỏ là cốt sợi borbon có tiết diện hình chữ nhật 0.25×0.75 . Trong hình 3.3(b) là mẫu cốt sợi dài màu đỏ là sợi boron có tiết diện hình chữ nhật 0.5×1 . Các thông số vật liệu bao gồm vật liệu nền (aluminum) và cốt sợi (boron) như sau:

Sợi Boron:

Mô đun đàn hồi Young : $E_{Bo} = 400$ GPa.

Hệ số poisson : $\nu_{Bo} = 0.2$

Vật liệu nền aluminum:

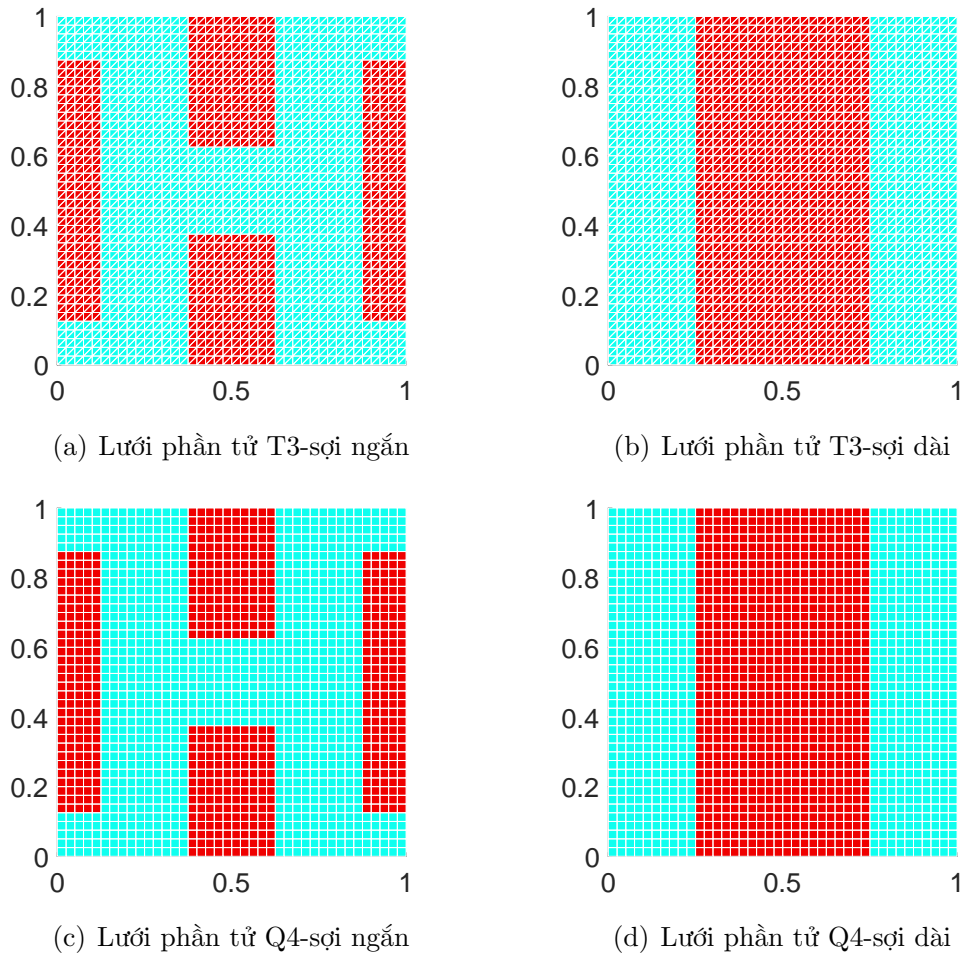
Mô đun đàn hồi Young E_{Al} : 72.5 GPa.

Hệ số poisson ν_{Al} : 0.33

Biến dạng của cấp độ vĩ mô được truyền vào bài toán cấp độ vi mô theo [59].

$$\bar{\epsilon} = \begin{bmatrix} \bar{\epsilon}_{11} & \bar{\epsilon}_{22} & \bar{\epsilon}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.001 & 0.001 & 0.0034 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

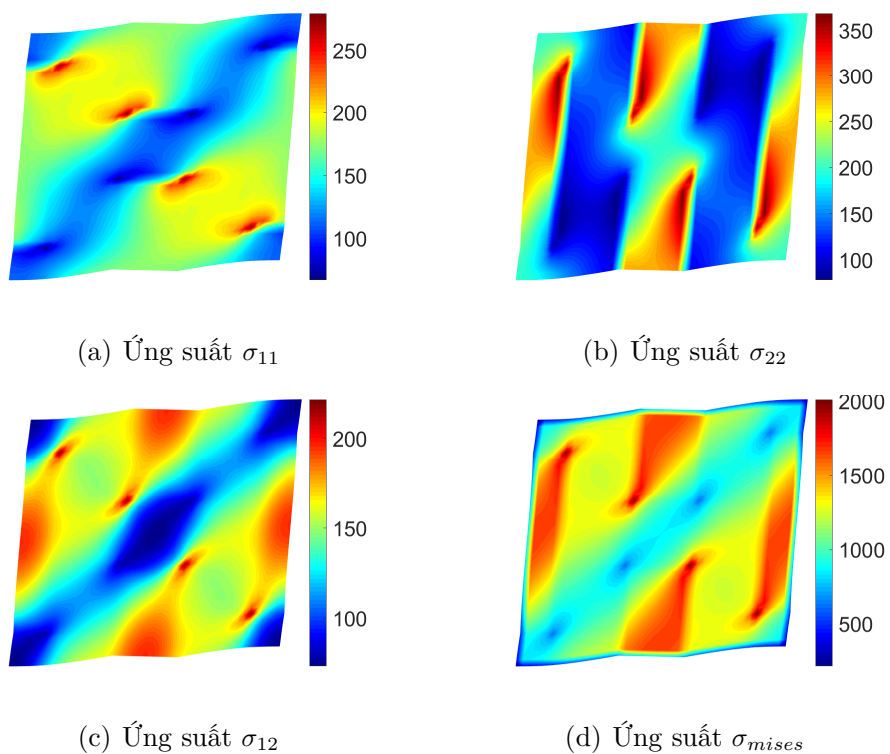
Kích thước của mẫu vật liệu không đồng nhất bao gồm hai pha vật liệu được thể hiện trên hình 3.3. Thể tích thành phần cốt sợi là 0.375 (cốt sợi ngắn) và 0.5 (cốt sợi dài). Lưới phần tử được thực hiện như hình 3.4 bao gồm 1600 phần tử Q4 và 3200 phần tử T3. Kết quả thu được bao gồm các hệ số mô đun đàn hồi hữu hiệu, trường chuyển vị và ứng suất của cấu trúc vi mô với hai điều kiện biên (điều kiện biên tuyến tính và điều kiện biên tuần hoàn). Hai trường hợp đều được so sánh với kết quả của nghiên cứu bởi của Fish và Wagiman [60] và nghiên cứu khác được thực hiện bởi Ghosh và các cộng sự [7] với phần tử VCFEM (Voronoi Cell Finite Element method). Khi xem xét với phần tử Q4 đã cho kết quả trùng khớp với [60]. Bên cạnh đó, sự khác biệt khá lớn về khả năng kháng trượt giữa kết quả khi sử



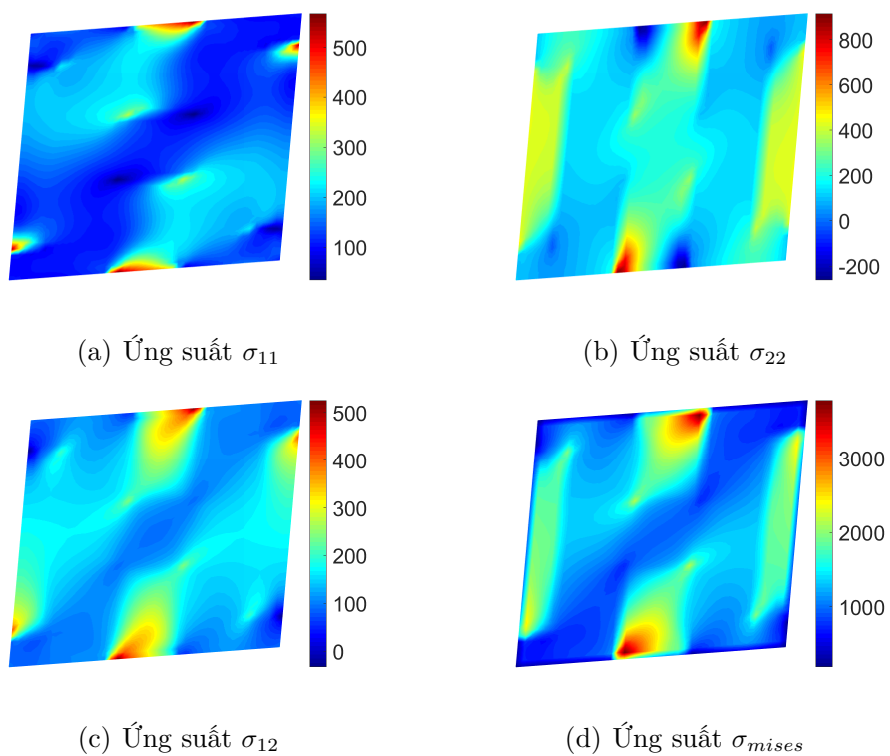
Hình 3.4: Lưới phần tử hữu hạn T3 và Q4 của vật liệu cốt sợi ngắn và cốt sợi dài.

Trường chuyển vị và ứng suất của phần tử đại diện vật liệu sợi ngắn với điều kiện biên tuyến tính được thể hiện trong hình 3.6 với điều kiện biên tuần hoàn trong hình 3.5. Trường chuyển vị và ứng suất của phần tử đại diện vật liệu sợi dài với điều kiện biên tuyến tính được thể hiện trong hình 3.8 và điều kiện biên tuần hoàn được thể hiện trong hình 3.7. Đối với trường chuyển vị, điều kiện biên tuyến tính có chuyển vị là đường thẳng trên biên phần tử và điều kiện biên tuần hoàn là đường cong và có sự bất liên tục tại vị trí ranh giới các pha vật liệu khác nhau. Đối với trường ứng suất, việc áp dụng điều kiện biên linh động hơn nên giảm sự tập trung ứng suất và mô đun đàn hồi kháng trượt hữu hiệu sẽ thấp hơn khi sử dụng điều kiện biên tuyến tính. Qua đó, các mô phỏng khi áp dụng điều kiện biên tuần hoàn có thể đáp ứng với ứng xử vật liệu tốt hơn.

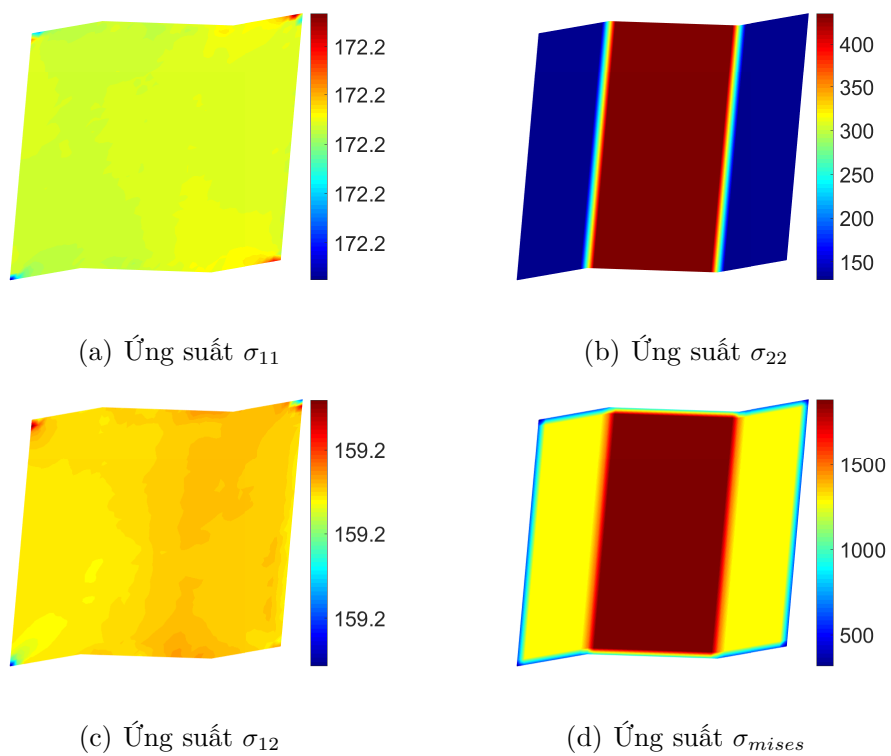
Trong bảng 3.1, trường hợp cốt sợi ngắn thì khi xem xét biên tuần hoàn thì đem lại kết quả hầu như tương đồng với kết quả [60] với sai số rất bé [$D_{11}(0.05\%)$]



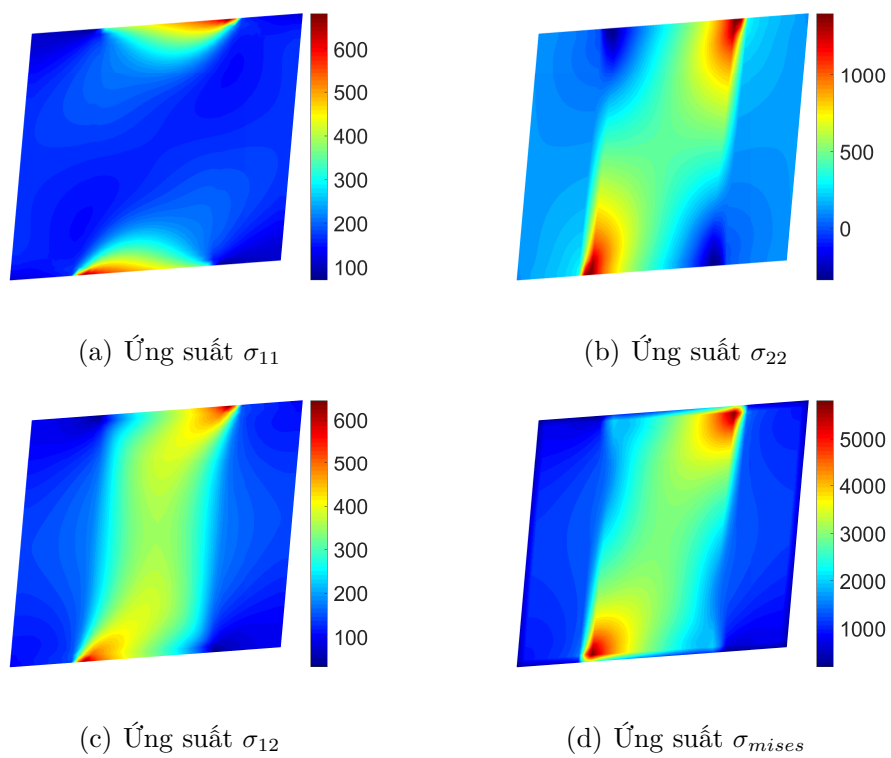
Hình 3.5: Ứng suất RVE cốt sợi ngắn với điều kiện biên tuần hoàn.



Hình 3.6: Ứng suất RVE cốt sợi ngắn với điều kiện biên tuyến tính.



Hình 3.7: Ứng suất RVE cốt sợi dài với điều kiện biên tuần hoàn.



Hình 3.8: Ứng suất RVE cốt sợi dài với điều kiện biên tuyến tính.

$D_{22}(0.07\%) D_{12}(0.1\%) D_{33}(0.03\%)$]. Khi so sánh giữa kết quả bài toán khi sử dụng hai phần tử T3 và Q4 khác biệt khá nhỏ (0.1%). So sánh kết quả bài toán khi sử dụng hai điều kiện biên tuyến tính và điều kiện biên tuần hoàn phần tử Q4 thì có sự khác biệt tương đối về cường độ kháng trượt (10.38%). Trong bảng 3.2, trường hợp vật liệu cốt sợi dài thì sai số lớn nhất khi sử dụng phần tử Q4 là 0.01 % và hầu như không có sự khác biệt khi xem xét kết quả phần tử T3 và Q4 khi xem xét với điều kiện biên tuần hoàn. Đối với kết quả điều kiện biên tuyến tính thì chênh lệch lớn nhất là 0.26 %.

Bảng 3.3: Bảng thông số vật liệu hữu hiệu của mô hình cốt sợi ngắn.

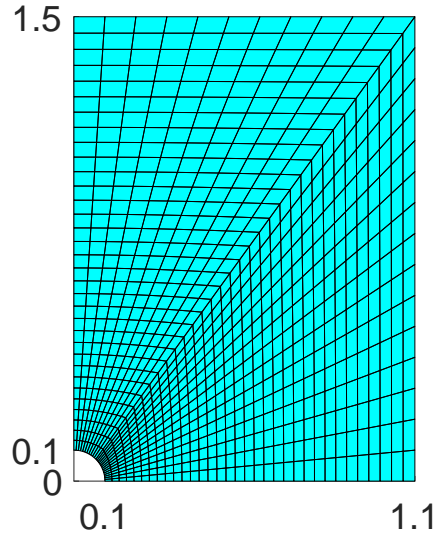
	K_{eff}	G_{eff}	K_V	K_R	G_V	G_R
Biên tuyến tính T3	81.314	46.631				
Biên tuyến tính Q4	81.115	46.468				
Biên tuần hoàn T3	79.344	42.139	127.565	76.618	79.535	39.712
Biên tuần hoàn Q4	79.313	42.097				

Bảng 3.4: Bảng thông số vật liệu hữu hiệu của mô hình cốt sợi dài.

	K_{eff}	G_{eff}	K_V	K_R	G_V	G_R
Biên tuyến tính T3	95.997	65.719				
Biên tuyến tính Q4	95.768	65.594				
Biên tuần hoàn T3	86.107	46.850	152.052	88.957	96.961	46.850
Biên tuần hoàn Q4	86.107	46.850				

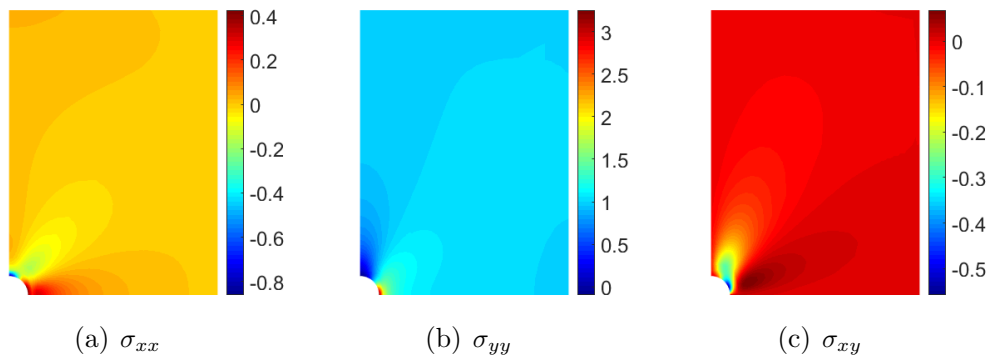
Trong bảng 3.3 thể hiện sự khác biệt giữa các thông số vật liệu hữu hiệu khi sử dụng điều kiện biên tuyến tính và điều kiện biên tuần hoàn. Khi xem xét mô đun đàn hồi khối hữu hiệu K_{eff} chênh lệch khá nhỏ (2.27%), trường hợp mô đun kháng trượt hữu hiệu G_{eff} chênh lệch khá lớn (10.38%), đối với mô đun đàn hồi hữu hiệu E_{eff} chênh lệch tương đối nhỏ (5.67%) và đối với hệ số nở hông hữu hiệu ν_{eff} chênh lệch khá lớn (13.43 %). Điều này có thể giải thích do biên tuần hoàn có sự thay đổi đa dạng hơn và mềm hơn khi so sánh với biên tuyến tính. Trong bảng 3.4 thì chênh lệch giữa biên tuần hoàn và biên tuyến tính. Đối với mô đun khối hữu hiệu K_{eff} chênh lệch khá lớn (11.22%), đối với mô đun kháng trượt hữu hiệu G_{eff} chênh lệch lớn (40.02%), đối với mô đun đàn hồi hữu hiệu E_{eff} khá lớn (12%) và đối với hệ số nở hông hữu hiệu ν_{eff} chênh lệch khá lớn (7.52%). Qua đó, các hằng số vật liệu đã được tính toán thông qua kỹ thuật đồng nhất hoá. Sự chênh lệch là tương đối lớn tùy theo cách bố trí và hình dạng của cốt liệu. Việc lựa chọn điều

kiện biên áp dụng cho bài toán vật liệu cấp độ vĩ mô đóng vai trò quan trọng. Qua đó, điều kiện biên tuần hoàn đã thể hiện ưu thế khi so sánh với nghiên cứu Fish [60].



Hình 3.9: Lưới phần tử của bài toán cấp độ vĩ mô: tấm có lỗ tròn

Bài toán kết cấu tấm hỗn hợp mỏng với hình dạng tấm tròn có lỗ ở giữa chịu kéo dọc. Bài toán có tính đối xứng về hình học và tải trọng nên ta mô hình một phần tư tấm với điều kiện đối xứng trục được thể hiện như hình 3.9. Trường ứng suất của cấp độ bài toán vĩ mô được thể hiện trong hình 3.10 (bài toán cốt sợi ngắn) và hình 3.11 (bài toán cốt sợi dài).



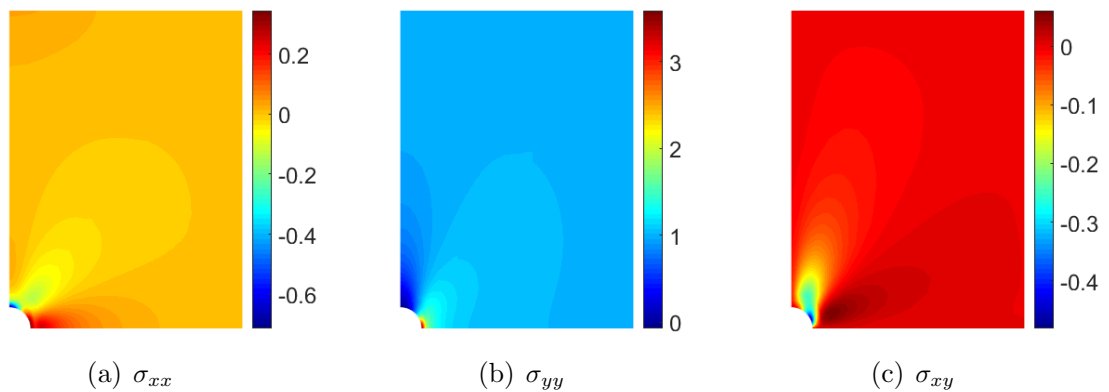
Hình 3.10: Ứng suất của tấm vĩ mô có lỗ tròn cho vật liệu cốt sợi ngắn.

Với trường hợp cốt sợi ngắn, ứng suất tập trung σ_{22} lớn nhất tại điểm A chênh lệch khá nhỏ (1.73% so với kết quả VCFEM [7] hay 1.13% so với kết quả HOMO2D[7] theo bảng 3.5. Với trường hợp cốt sợi dài, ứng suất tập trung σ_{22} lớn

Bảng 3.5: Ứng suất tại điểm mép lỗ tròn trong bài toán cấp độ vĩ mô.

	σ_{11}	σ_{22}	σ_{12}
Cốt sợi dài	0.32410	3.58450	-0.00680
Cốt sợi dài (VCFEM)	0.13191	3.7152	-0.07185
Cốt sợi dài (HOMO2D)	0.13191	3.7152	-0.07185
Cốt sợi ngắn	0.38720	3.2502	-0.00790
Cốt sợi ngắn (VCFEM)	0.13314	3.1950	-0.06965
Cốt sợi ngắn (HOMO2D)	0.13317	3.2874	-0.07000

nhất tại điểm A chênh lệch khá nhỏ (3.52% so với kết quả VCFEM [7]). Bên cạnh đó, vùng tập trung ứng suất quanh lỗ được thể hiện trong hình 3.10 với cốt liệu sợi ngắn và hình 3.11 với cốt liệu sợi dài.



Hình 3.11: Ứng suất của tấm vĩ mô có lỗ tròn cho vật liệu cốt sợi dài.

3.6.2 Vật liệu có cốt sợi hình tròn

Bên cạnh cốt sợi hình chữ nhật, việc sử dụng các sợi gia cường tiết diện tròn nhằm tăng khả năng làm việc của vật liệu cũng rất phổ biến. Sự pha trộn giữa vật liệu nền (keo Epoxy) cùng với cốt liệu (sợi thủy tinh) là một trường hợp điển hình. Chúng ta sẽ khảo sát sự ảnh hưởng của thể tích cốt sợi đến các tính chất đặc trưng hữu hiệu của vật liệu.

Tính chất vật liệu của hỗn hợp bao gồm vật liệu nền là Epoxy và vật liệu cốt là sợi thủy tinh

Sợi thủy tinh :

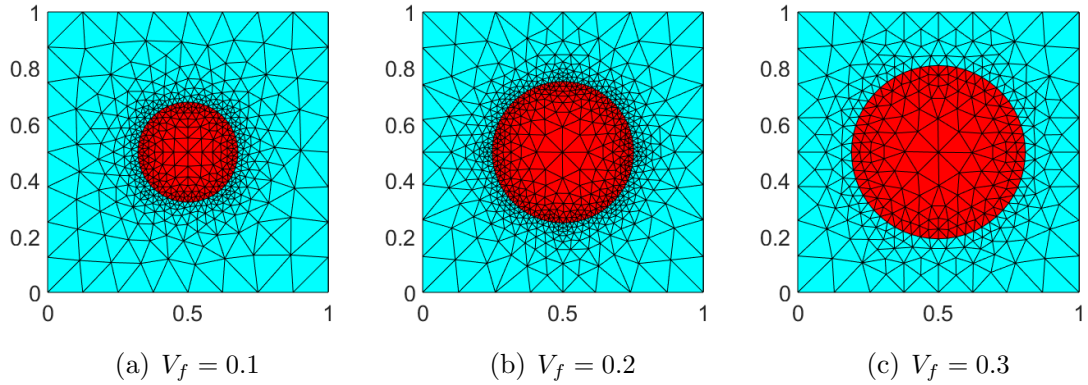
Modul đàn hồi Young (E_1) : 73 GPa.

Hệ số poisson (ν_1) : 0.2.

Vật liệu nền chất keo Epoxy :

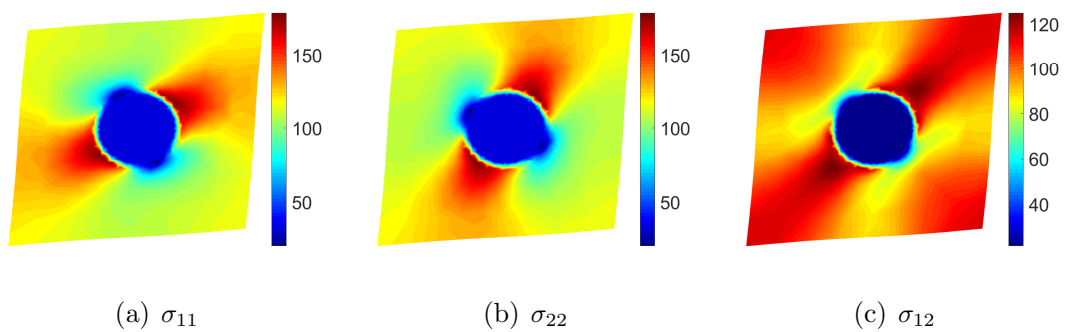
Modul đàn hồi Young (E_2) : 3.13 GPa.

Hệ số poisson (ν_2) : 0.34.



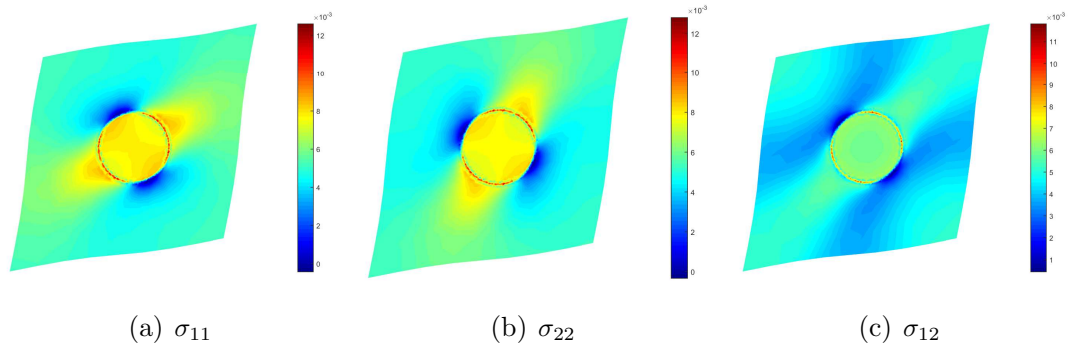
Hình 3.12: Lưới phần tử T3 cho bài toán RVE vật liệu cốt sợi tròn.

Chuyển vị của RVE khi dùng điều kiện biên tuần hoàn mềm hơn nên có khả năng đáp ứng với chuyển vị trong thực tế hơn. Điều này nên hầu hết các nghiên cứu hiện nay đều tập trung vào việc sử dụng điều kiện biên tuần hoàn. Trong phần này phần tử ES-T3 sẽ được sử dụng để so sánh với các kết quả của phần tử hữu hạn T3.

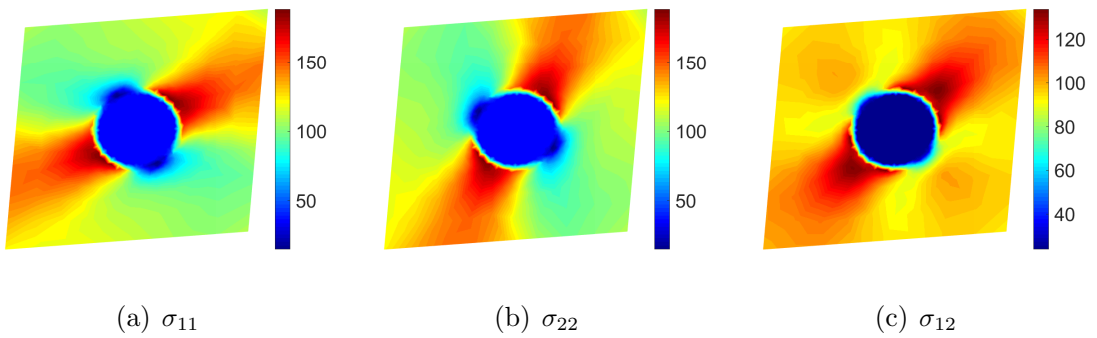


Hình 3.13: Ứng suất RVE sợi tròn với phần tử T3 với biên tuần hoàn ($V_f = 0.1$)

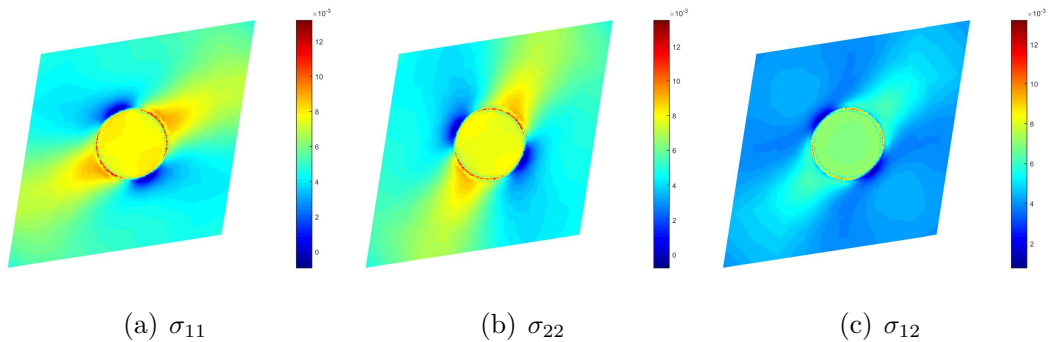
Hình 3.13 thể hiện sự phân bố ứng suất trong phần tử đại diện RVE khi sử dụng phần tử T3 với điều kiện biên tuần hoàn và hình 3.14 khi sử dụng phần tử làm trơn cạnh (ES- Edge Smooth). Ngoài ra ứng suất trong phần tử đại diện với điều



Hình 3.14: Ứng suất RVE sợi tròn với phần tử ES-T3 với biên tuần hoàn ($V_f = 0.1$)



Hình 3.15: Ứng suất RVE sợi tròn với phần tử T3 với biên tuyến tính ($V_f = 0.1$)



Hình 3.16: Ứng suất RVE sợi tròn với phần tử ES-T3 với biên tuyến tính ($V_f = 0.1$)

kiện biên tuyến tính với hình 3.15 (phần tử T3) và hình 3.16 (phần tử ES-T3). Ứng suất của RVE khi sử dụng phần tử ES-T3 tập trung phân bố tại vùng tiếp giáp hai pha vật liệu. khi sử dụng phần tử T3 thì ứng suất phân bố chủ yếu trong vùng cốt sợi. Khi xem xét hai mẫu dùng biên tuyến tính và mẫu dùng biên tuần hoàn thì ứng suất σ_{12} cực đại của dùng biên tuần hoàn thấp hơn. Điều này có thể giải thích bằng việc điều kiện biên linh hoạt đã giảm sự tập trung ứng suất bên trong phần

tử.

Bảng 3.6: Ma trận hằng số vật liệu hữu hiệu của vật liệu cốt sợi tròn.

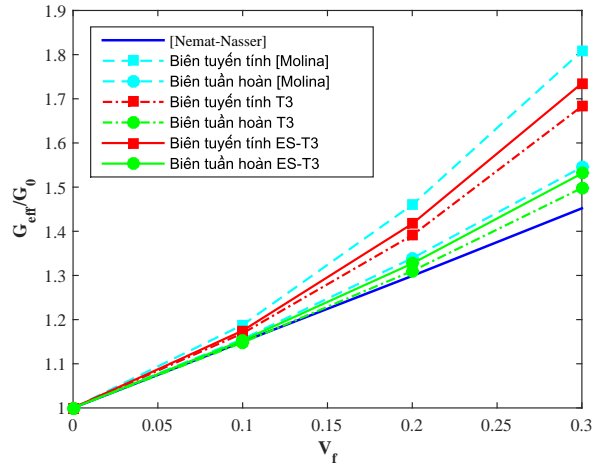
		D_{11}	D_{22}	D_{12}	D_{33}
Vật liệu nền		3.539	3.539	1.203	1.168
Vật liệu gia cường		76.042	76.042	15.208	30.417
Biên tuần hoàn	Phần tử T3 ($V_f = 0.1$)	4.103	4.102	1.365	1.341
	Phần tử T3 ($V_f = 0.2$)	4.829	4.829	1.524	1.530
	Phần tử T3 ($V_f = 0.3$)	5.296	5.296	3.734	1.750
	Phần tử ES ($V_f = 0.1$)	4.124	4.124	1.371	1.347
	Phần tử ES ($V_f = 0.2$)	4.914	4.912	1.540	1.550
	Phần tử ES ($V_f = 0.3$)	5.463	5.463	3.829	1.788
Biên tuyến tính	Phần tử T3 ($V_f = 0.1$)	4.122	4.122	1.368	1.370
	Phần tử T3 ($V_f = 0.2$)	4.868	4.868	1.527	1.630
	Phần tử T3 ($V_f = 0.3$)	5.859	5.859	1.698	1.972
	Phần tử ES ($V_f = 0.1$)	4.144	4.144	1.374	1.377
	Phần tử ES ($V_f = 0.2$)	4.955	4.953	1.542	1.660
	Phần tử ES ($V_f = 0.3$)	6.030	6.030	1.722	2.032

Bảng 3.7: Các hằng số vật liệu hữu hiệu của vật liệu cốt sợi gia cường hình tròn.

		E_{eff}	ν_{eff}	K_{eff}	G_{eff}	K_V	G_V	K_R	G_R
Vật liệu nền		3.130	0.340	2.371	1.168				
Vật liệu gia cường		73.000	0.200	45.625	30.417				
$V_f = 0.1$	T3 (biên tuần hoàn)	3.649	0.333	2.734	1.341	6.69	4.09	2.62	1.29
	ES (biên tuần hoàn)	3.668	0.332	2.748	1.347				
	T3 (biên tuyến tính)	3.669	0.332	2.745	1.370				
	ES (biên tuyến tính)	3.688	0.332	2.759	1.377				
$V_f = 0.2$	T3 (biên tuần hoàn)	4.348	0.316	3.177	1.530	11.02	7.01	2.92	1.44
	ES (biên tuần hoàn)	4.431	0.313	3.227	1.550				
	T3 (biên tuyến tính)	4.388	0.314	3.198	1.630				
	ES (biên tuyến tính)	4.475	0.311	3.249	1.660				
$V_f = 0.3$	T3 (biên tuần hoàn)	5.296	0.291	3.734	1.750	15.34	9.94	3.31	1.64
	ES (biên tuần hoàn)	5.463	0.287	3.829	1.788				
	T3 (biên tuyến tính)	5.368	0.290	3.779	1.972				
	ES (biên tuyến tính)	5.539	0.286	3.876	2.032				

Các hằng số của ma trận vật liệu hữu hiệu của RVE cốt sợi tròn được thể hiện trong bảng 3.6. Thông số $D_{11} = D_{22}$ điều này có thể giải thích vì sự đối xứng của cấu trúc vật liệu RVE nên khả năng chịu kéo theo hai phương tương đương nhau. Bên cạnh đó, thể tích cốt sợi tăng dần dẫn đến sự tăng dần các thông số đàn hồi hữu hiệu (D_{11}, D_{22}, D_{12} và D_{33}) là hợp lý. Hơn thế nữa, độ cứng hữu hiệu của vật liệu khi sử dụng biên tuyến tính lớn hơn biên tuần hoàn và khi sử dụng phần tử ES-T3 lớn hơn khi sử dụng phần tử T3.

Ngoài ra, các hằng số vật liệu hữu hiệu được xác định khi thể tích cốt sợi thay đổi trong bảng 3.7. Mô đun đàn hồi kháng trượt hữu hiệu G_{eff} của phần tử đại diện RVE khi dùng điều kiện biên tuần hoàn thấp hơn 10.99% (phần tử T3) và 11.73% (phần tử ES-T3) so với khi dùng điều kiện biên tuyến tính. Đồng thời mô đun đàn hồi kháng trượt hữu hiệu G_{eff} dùng ES-T3 lớn hơn 3.08% (biên tuyến tính) và 2.22% (biên tuần hoàn) dùng phần tử T3. Khi so sánh với ước lượng theo phương pháp cận của Voigt[1] và Reuss[2] thì các hệ số đàn hồi thì mô đun đàn hồi khối hữu hiệu K_{eff} và mô đun đàn hồi trượt hữu hiệu nằm gần với giá trị của Reuss[2] hơn so với Voigt[1]. Hình 3.17 thể hiện sự thay đổi của khả năng kháng trượt hữu hiệu khi



Hình 3.17: Mô đun kháng cắt G_{eff} của phần tử RVE với hai điều kiện biên

thể tích cốt sợi thay đổi và so sánh với đường màu xanh của Nemat- Nasser [14]. Khi thể tích của các cốt sợi nhỏ hơn 20% thì mô đun đàn hồi kháng trượt hữu hiệu G_{eff} của các phương pháp chênh lệch không nhiều so với nghiệm [14]. Nhưng khi thể tích cốt sợi thủy tinh tăng lên thì có sự chênh lệch thể hiện rõ. Điều kiện biên tuần hoàn cho kết quả gần với nghiệm giải tích [14] hơn khi sử dụng điều kiện biên tuyến tính. Khi sử dụng phần tử ES-T3 cho kết quả gần với kết quả số của Molina [58] hơn so với sử dụng phần tử T3.

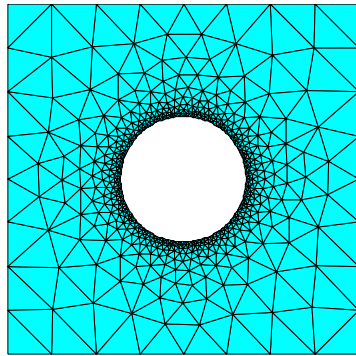
3.6.3 Vật liệu có lỗ rỗng

Vật liệu trong tự nhiên luôn tồn tại những lỗ rỗng mà không thể nhìn thấy bằng mắt thường. Thể tích lỗ rỗng này làm giảm yếu khả năng chịu lực của vật liệu. Vì vậy việc đánh giá sự ảnh hưởng của thể tích lỗ rỗng đến các thông số đàn hồi của vật liệu luôn được chú ý của các nghiên cứu. Trong ví dụ này sẽ khảo sát mẫu vật liệu MgO có thể tích lỗ rỗng thay đổi.

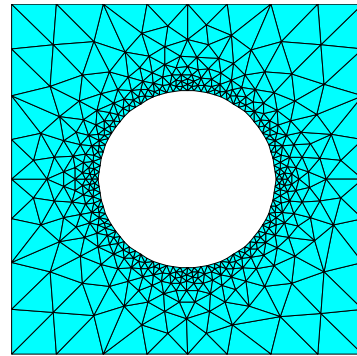
Tính chất vật liệu MgO :

Mô đun đàn hồi Young $E_0 = 306.1$ Gpa.

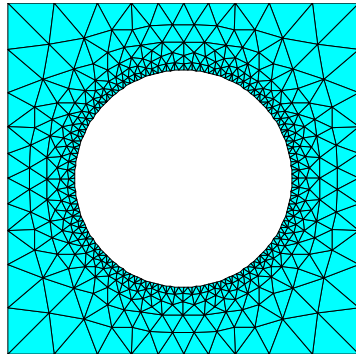
Hệ số poisson $\nu = 0.18$.



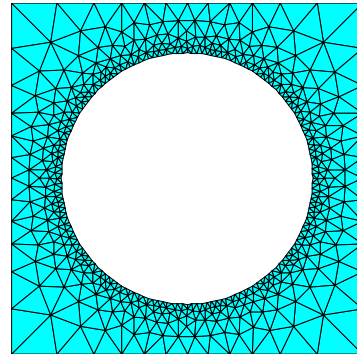
(a) $V_f = 0.1$



(b) $V_f = 0.2$



(c) $V_f = 0.3$



(d) $V_f = 0.4$

Hình 3.18: Hệ lưới phần tử T3 của RVE với thể tích lỗ rỗng khác nhau

Các kết quả được so sánh với kết quả giải tích của Ramakrishnan[61]

$$K_{Rama} = \frac{K_0 \times (1 - V_f)}{1 + \frac{(1 + \nu) \times V_f}{2(1 - 2\nu)}} \quad (3.28a)$$

$$G_{Rama} = \frac{G_0 \times (1 - V_f)^2}{1 + \frac{(11 - 19\nu)V_f}{4(1 + \nu)}} \quad (3.28b)$$

$$E_{Rama} = \frac{E_0 \times (1 - V_f)^2}{1 + 2 \times V_f} \quad (3.28c)$$

$$\nu_{Rama} = \frac{4\nu + 3V_f - 7 \times \nu \times V_f}{4(1 + 2V_f - 3 \times \nu \times V_f)} \quad (3.28d)$$

Với E_0 , G_0 , K_0 , ν lần lượt là mô đun đàn hồi, mô đun kháng trượt, mô đun đàn hồi khối và hệ số nở hông của mẫu vật liệu ban đầu.

Hệ số thực nghiệm của Spriggs [62] khi xem xét ảnh hưởng của lỗ rỗng đến mô đun đàn hồi hữu hiệu của vật liệu MgO

$$E_{Spiggs} = E_0 \times e^{-3.55 \times V_f} \quad (3.29a)$$

$$G_{Spiggs} = G_0 \times e^{-3.3 \times V_f} \quad (3.29b)$$

Phần tử RVE có kích thước 1 đơn vị và thể tích lỗ rỗng thay đổi $V_f = [0.1; 0.4]$ được xem xét. Hệ lưới phần tử T3 được thể hiện ở hình 3.18.

Khi được truyền một biến dạng từ cấp độ vĩ mô, phần tử RVE có lỗ rỗng có điều kiện biên tuyến tính thì D_{11} và D_{22} chênh lệch không lớn (3.37 %) so với xét điều kiện biên tuần hoàn. Sự chênh lệch này tăng dần cùng với sự tăng kích thước lỗ rỗng. Các hằng số vật liệu giảm dần khi kích thước lỗ rỗng tăng dần là hợp lí. Đặc biệt khi xem xét đến mô đun kháng trượt hữu hiệu (D_{33}) có sự khác biệt rất lớn (161.90%) giữa hai điều kiện biên được thể hiện ở bảng 3.8.

Bảng 3.8: Ảnh hưởng của lỗ rỗng đến ma trận hằng số vật liệu.

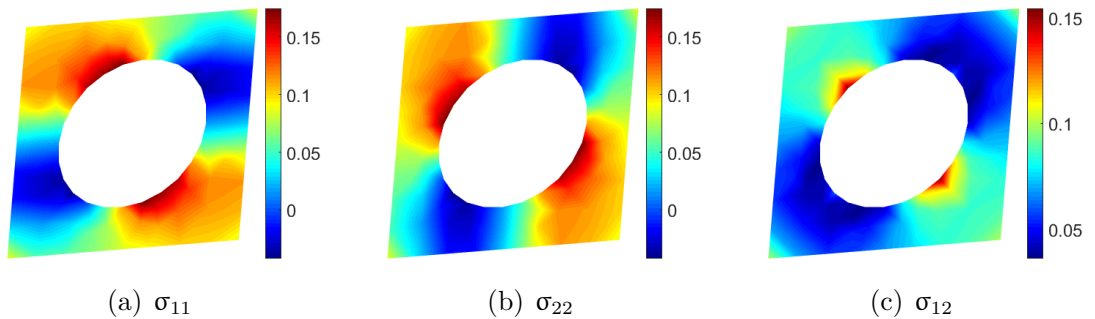
Thể tích lỗ rỗng		0.1	0.2	0.3	0.4	Đồng nhất
D_{11} (Gpa)	Biên tuyến tính	274.03	246.48	226.37	210.60	316.35
	Biên tuần hoàn	273.12	244.60	223.25	205.67	
D_{22} (Gpa)	Biên tuyến tính	274.03	246.48	226.37	210.60	316.35
	Biên tuần hoàn	273.12	244.60	223.25	205.67	
D_{12} (Gpa)	Biên tuyến tính	53.91	46.69	39.90	34.14	56.94
	Biên tuần hoàn	53.98	46.11	37.63	29.33	
D_{33} (Gpa)	Biên tuyến tính	108.21	94.65	85.00	77.50	129.70
	Biên tuần hoàn	100.90	74.92	52.82	35.52	

Các thông số đàn hồi hữu hiệu như mô đun đàn hồi E_{eff} , mô đun đàn hồi trượt hữu hiệu G_{eff} , mô đun đàn hồi khối hữu hiệu K_{eff} và hệ số nở hông hữu hiệu ν_{eff}

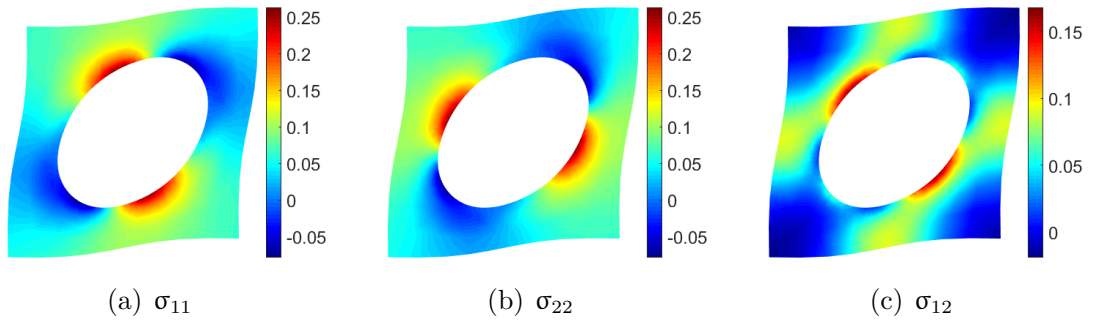
Bảng 3.9: Các hằng số đàn hồi hữu hiệu của tấm phẳng có lỗ tròn.

V_f		0.1	0.2	0.3	0.4
E_{eff}	Biên tuyến tính	260.757	230.055	207.510	189.792
	Biên tuần hoàn	249.613	197.753	150.385	109.092
	Ramakrishnan [61]	206.618	139.931	93.743	61.220
	Spriggs [62]	214.629	150.492	105.521	73.989
ν_{eff}	Biên tuyến tính	0.188	0.192	0.195	0.197
	Biên tuần hoàn	0.188	0.193	0.196	0.198
	Ramakrishnan [61]	0.195	0.207	0.216	0.223
	Tandon và Weng [63]	0.182	0.184	0.185	0.187
K_{eff}	Biên tuyến tính	163.970	146.585	133.135	122.370
	Biên tuần hoàn	163.550	145.355	130.440	117.500
	Ramakrishnan [61]	183.468	176.847	166.786	153.283
	Voigt [1]	167.981	149.317	130.652	111.987
G_{eff}	Biên tuyến tính	108.210	94.650	85.000	77.50
	Biên tuần hoàn	100.900	74.920	52.820	35.52
	Ramakrishnan [61]	90.522	62.830	42.891	28.430
	Spriggs [62]	93.247	67.037	48.195	34.648
	Voigt [1]	116.733	103.763	90.792	77.822

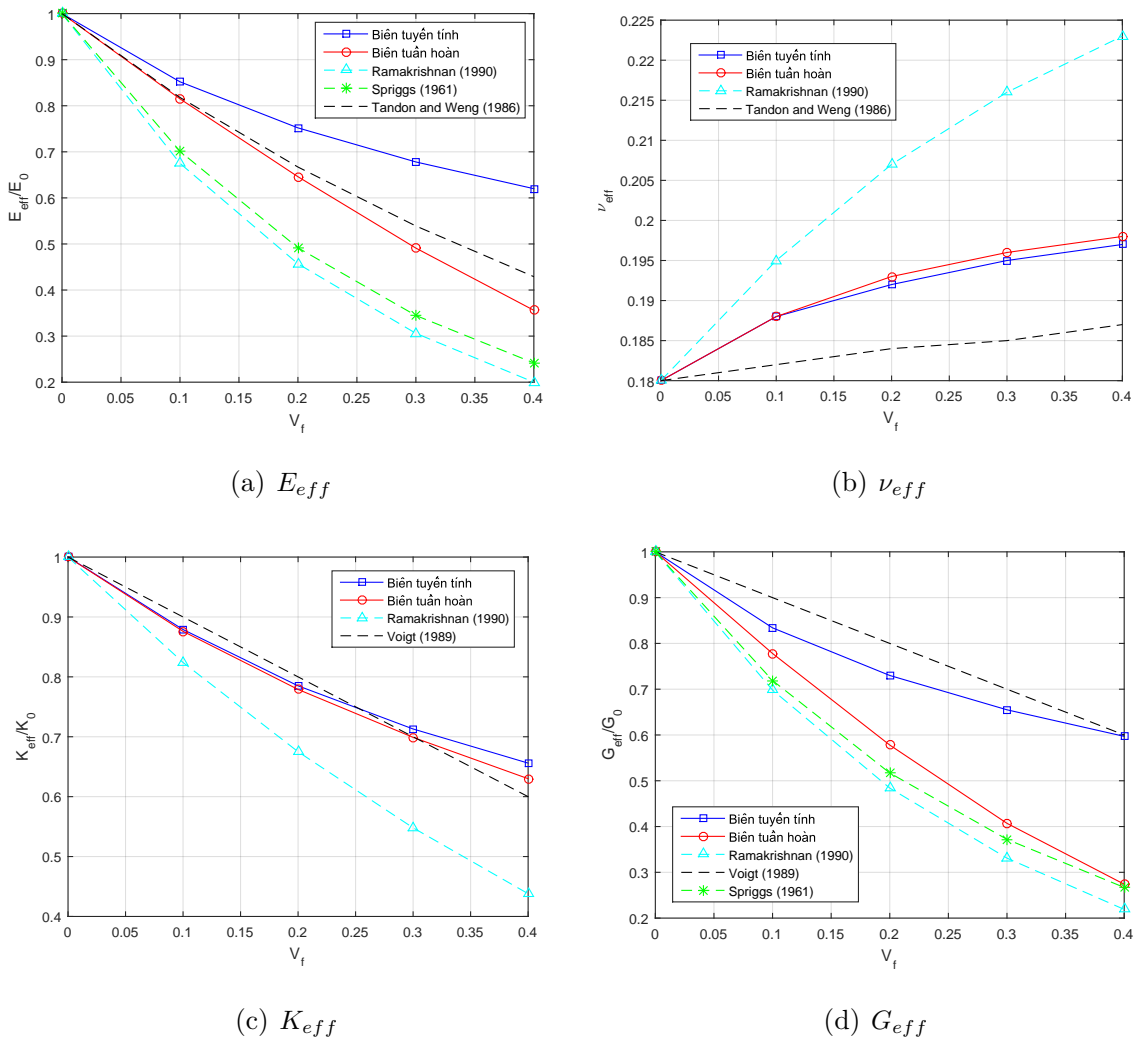
của vật liệu có lỗ rỗng được thể hiện qua bảng 3.9. Trường ứng suất và chuyển vị tương ứng đối với hai điều kiện biên được thể hiện trong hình 3.19 (biên tuyến tính) và hình 3.20 (biên tuần hoàn). Điều kiện biên tuyến tính có ràng buộc biên cứng nên dẫn đến vùng tập trung ứng suất lớn hơn so với điều kiện biên tuần hoàn. Khi sử dụng điều kiện biên tuần hoàn RVE có chuyển vị trên biên linh hoạt hơn nên ứng suất quanh lỗ rỗng sẽ thấp hơn 29% với trường hợp thể tích lỗ rỗng $V_f = 0.1$.



Hình 3.19: Chuyển vị và ứng suất của RVE biên tuyến tính với $V_f = 0.1$.



Hình 3.20: Chuyển vị và ứng suất của RVE biên tuần hoàn với $V_f = 0.1$.



Hình 3.21: Các thông số đàn hồi hữu hiệu của vật liệu có lỗ rỗng tròn.

Các thông số đàn hồi hữu hiệu được chuẩn hoá so với vật liệu ban đầu được thể hiện trong hình 3.21. Đối với mô đun đàn hồi hữu hiệu E_{eff} , được thể hiện đường

màu đỏ (biên tuần hoàn) và đường màu xanh dương (biên tuyến tính), thì điều kiện biên tuần hoàn thấp hơn biên tuyến tính và nằm giữa các giá trị của Voigt và Spriggs [62] và có xu hướng giảm dần khi thể tích lỗ rỗng tăng lên. Đối với hệ số nở hông hữu hiệu ν_{eff} thì có xu hướng tăng dần khi thể tích lỗ rỗng tăng dần và nằm giữa hai giá trị tham khảo của Ramakrishnan [61] và Tandon và Weng [63]. Đối với mô đun đàn hồi khối hữu hiệu K_{eff} , sự giảm dần của mô đun đàn hồi khối khi thể tích lỗ rỗng tăng dần là hợp lý. Hai điều kiện biên đều bám theo giá trị của Voigt [1]. Đối với mô đun đàn hồi kháng trượt hữu hiệu G_{eff} , sự giảm dần của mô đun đàn hồi kháng trượt khi thể tích lỗ rỗng tăng dần là hợp lý. Điều kiện biên tuần hoàn bám sát với nghiệm thực nghiệm của Spriggs [62] và điều kiện biên tuyến tính lớn hơn và nằm dưới nghiệm của Voigt [1]. Qua đó, hai điều kiện biên có sự chênh lệch khá lớn thì thể tích lỗ rỗng lớn hơn $V_f = 0.3$, đặc biệt đối với mô đun đàn hồi kháng trượt hữu hiệu và mô đun đàn hồi Young. Ngược lại, hai điều kiện biên này có chênh lệch khá nhỏ khi xem xét về mô đun đàn hồi khối hữu hiệu và hệ số nở hông hữu hiệu.

3.6.4 Vật liệu có cơ tính biến thiên (FGM)

Ngày nay, vật liệu được pha trộn với nhau nhằm tận dụng được các thuộc tính ưu việt của mỗi loại vật liệu để tạo thành vật liệu đặc thù. Một trong số đó là vật liệu có cơ lý biến thiên như bao gồm sự pha trộn giữa gốm và kim loại. Sự kết hợp này giúp cải thiện về khả năng chịu lực của kim loại và cải thiện về khả năng chịu nhiệt độ của gốm. Thông thường, các hằng số vật liệu hữu hiệu được đưa ra bởi "luật pha trộn" theo tỷ lệ thể tích của từng loại vật liệu thành phần. Trong ví dụ này, kỹ thuật đồng nhất hoá được sử dụng để đưa ra các hằng số vật liệu của từng trường hợp ngẫu nhiên. Sau đó, các kết quả được thống kê để đánh giá ứng xử trung bình của vật liệu có cơ lý biến thiên. Hai loại vật liệu được kết hợp là Al_2O_3 và ZrO_2 được xem xét với thuộc tính như sau:

Vật liệu kim loại Alumina (Al_2O_3):

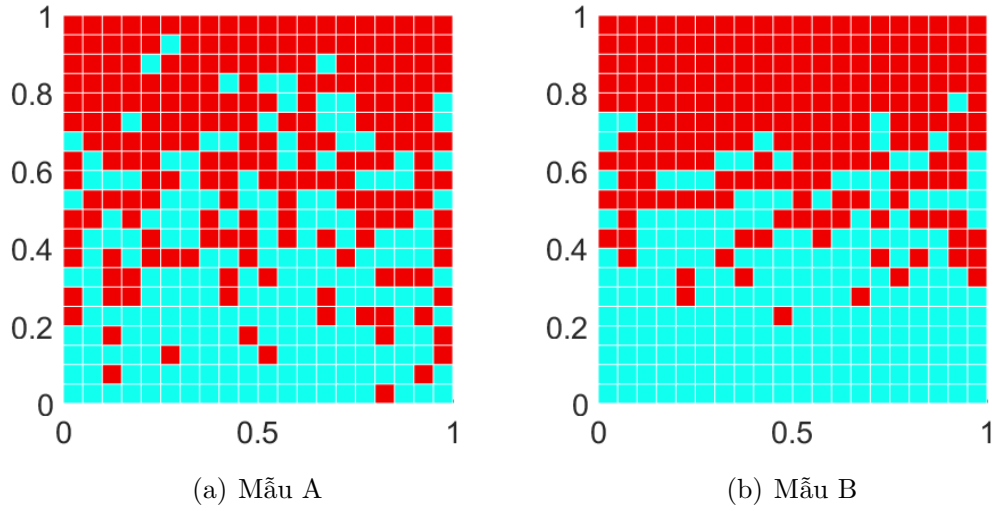
Modul đàn hồi Young E_{Alu} : 380 GPa.

Hệ số poisson ν_{Alu} : 0.3

Vật liệu gốm Zirconia (ZrO_2):

Modul đàn hồi Young E_{Zir} : 150 GPa.

Hệ số poisson ν_{Zir} : 0.3



Hình 3.22: Mô hình hai vật liệu cơ lý biến thiên FGM: A và B

Mẫu vật liệu A là vật liệu có sự biến thiên từ kim loại ở mặt đáy đến gốm ở mặt trên. Tỷ lệ thể tích của vật liệu gốm V_c của mẫu vật liệu A được xác định theo công thức

$$V_{Zir}(z) = \left(\frac{2 \times z + h}{2 \times h} \right)^p \quad (3.30)$$

Với p là tham số vật liệu và z là tọa độ của điểm vật liệu.

Thực hiện việc phân bố ngẫu nhiên các mẫu theo chiều dày của kết cấu vật liệu A. Sau đó, thống kê các trường hợp mô đun đàn hồi hữu hiệu. Khi sai lệch chuẩn bé hơn 0.02 với độ tin cậy 95% thì kết thúc vòng lặp, ta được 68 mẫu vật liệu A.

Mẫu vật liệu B được chia thành ba lớp như sau:

- + Lớp kim loại từ $z=0.5 \times h$ đến $0.3 \times h$.
- + Lớp pha trộn hai vật liệu từ $z=0.3 \times h$ đến $-0.3 \times h$.
- + Lớp gốm từ $z=-0.3 \times h$ đến $-0.5 \times h$.

Tỷ lệ thể tích của gốm V_c của vật liệu B được xác định theo công thức

$$V_{Zir}(z) = \begin{cases} 0 & \text{khi } z \in [0.3 \times h; 0.5 \times h] & (3.31a) \\ \frac{z - z_2}{z_2 - z_3} & \text{khi } z \in [-0.3 \times h; 0.3 \times h] & (3.31b) \\ 1 & \text{khi } z \in [-0.5 \times h; -0.3 \times h] & (3.31c) \end{cases}$$

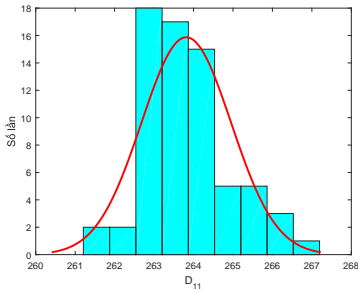
Thực hiện việc phân bố ngẫu nhiên các mẫu theo chiều dày của kết cấu vật liệu

B. Sau đó, thống kê các trường hợp mô đun đàn hồi hữu hiệu. Khi sai số chuẩn bé hơn 0.02 với độ tin cậy 95% thì kết thúc vòng lặp, ta được 38 mẫu vật liệu B.

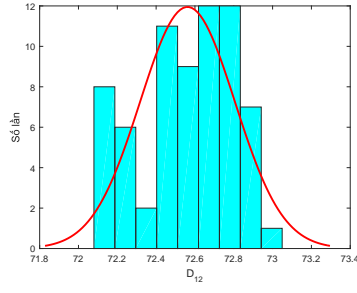
Mô hình phần tử Q4 bao gồm 400 phần tử và 441 nút của hai mẫu vật liệu cơ lý biến thiên thể hiện trong hình 3.22. Mô hình phân bố ngẫu nhiên hai pha vật liệu với ma trận hằng số vật liệu và giá trị trung bình của các hằng số vật liệu hữu hiệu theo thống kê của hai trường hợp được thể hiện theo bảng 3.10.

Bảng 3.10: Mô đun đàn hồi hữu hiệu của vật liệu cơ lý biến thiên A và B.

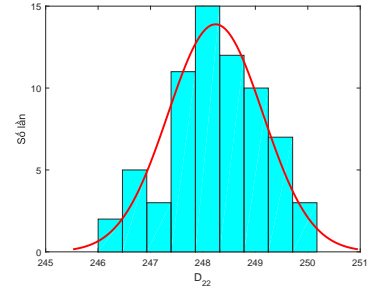
	D_{11}^{eff}	D_{22}^{eff}	D_{12}^{eff}	E_{11}	E_{22}	ν_{12}	ν_{21}	K_{eff}	G_{eff}
Alumina (Al_2O_3)	417.58	417.58	125.27	380		0.30		271.73	146.15
Zirconia (ZrO_2)	164.84	164.84	49.45	150		0.30		107.145	57.69
Vật liệu A	263.82	248.24	72.56	242.61	228.28	0.292	0.275	168.19	85.94
Vật liệu B	277.66	247.97	73.24	256.03	228.65	0.295	0.264	175.45	86.23



(a) D_{11}

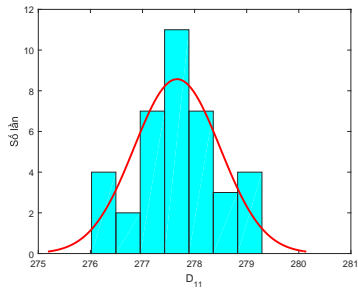


(b) D_{12}

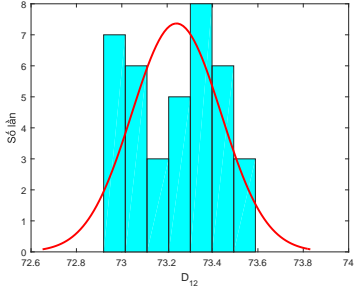


(c) D_{22}

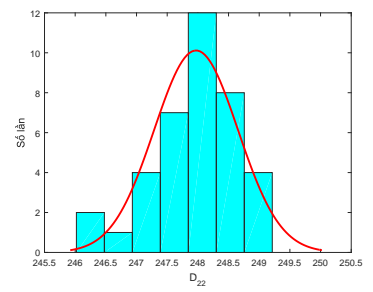
Hình 3.23: Phân bố các thông số của ma trận hằng số vật liệu mẫu A.



(a) D_{11}



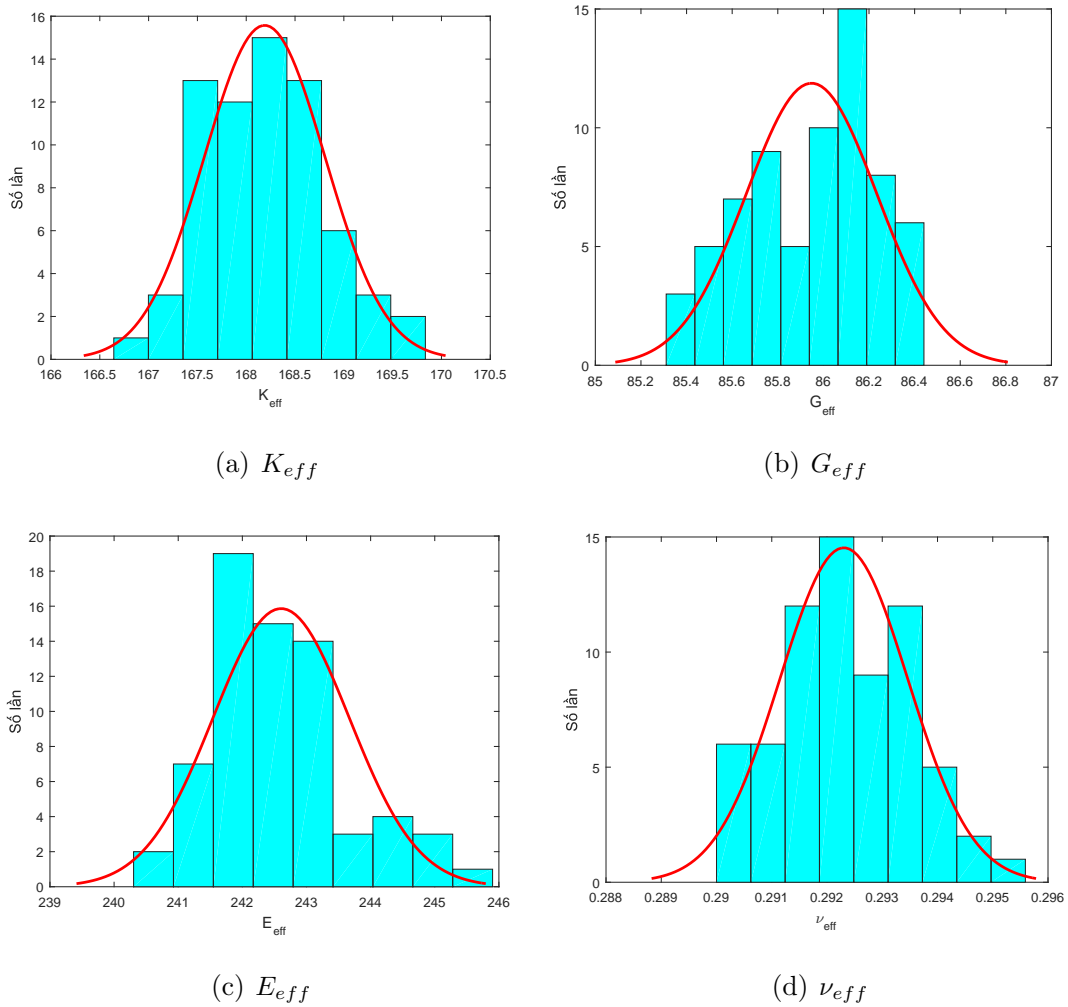
(b) D_{12}



(c) D_{22}

Hình 3.24: Phân bố các thông số của ma trận hằng số vật liệu mẫu B.

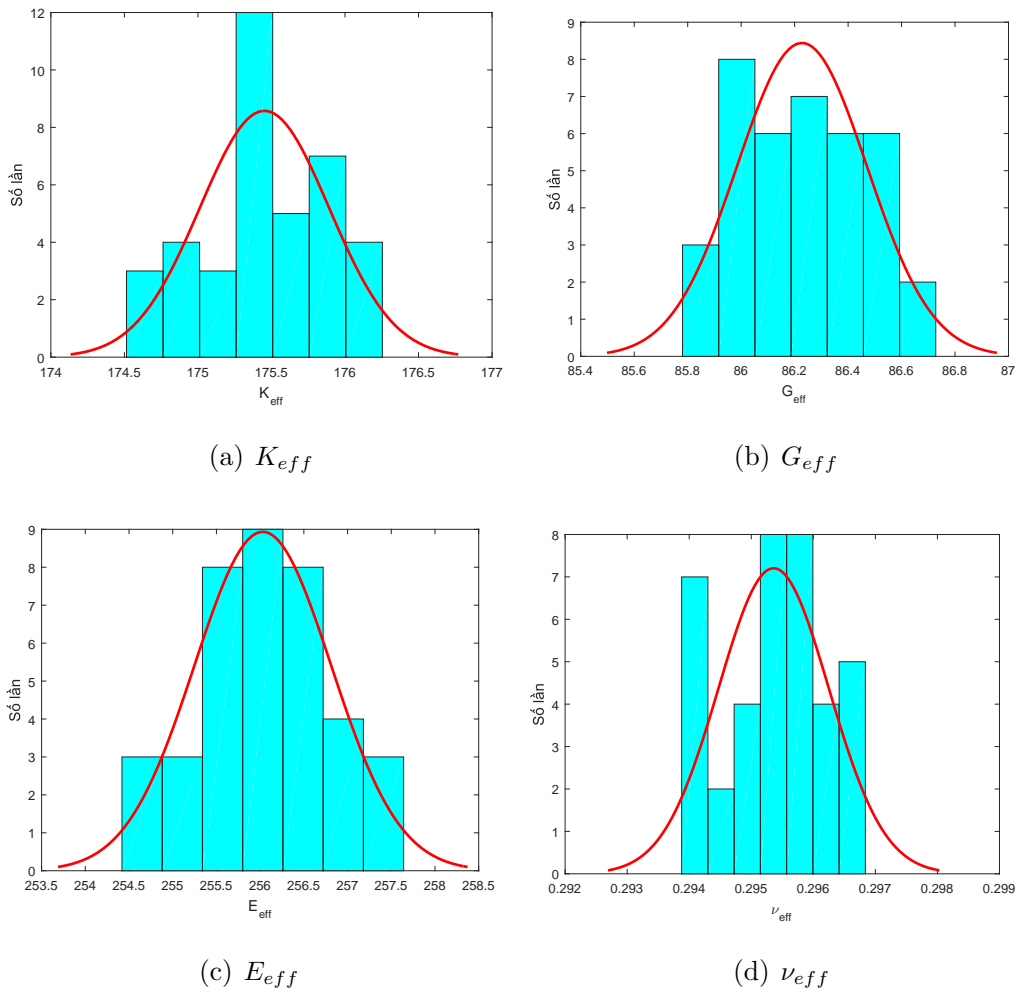
Phân bố của thông số của ma trận vật liệu hữu hiệu được thể hiện trong hình 3.23 (vật liệu A) và hình 3.24 (vật liệu B). Khả năng chịu kéo theo hai phương khác nhau trong cả hai mẫu vật liệu A và B ($D_{11} \neq D_{22}$). Điều này phù hợp với phân bố vật liệu không đồng nhất theo hai phương của vật liệu. Đối với mẫu vật liệu A, các hệ số ma trận vật liệu phân bố ngẫu nhiên trong khoảng ($D_{11} \in [261;267]$ GPa, $D_{22} \in [246;250]$ GPa và $D_{12} \in [72;73]$ GPa). Đối với vật liệu B, các hệ số ma trận phương ngang ($D_{11} \in [276;279]$ GPa) lớn hơn so với vật liệu A nhưng phương vuông góc $D_{22} \in [246;249]$ thì tương đương so với vật liệu A và $D_{12} \in [72.9;73.6]$ tăng nhẹ.



Hình 3.25: Phân bố thông số vật liệu hữu hiệu của mẫu A.

Các thông số đàn hồi hữu hiệu của hai mẫu vật liệu được thể hiện trong hình 3.25 (vật liệu A) và hình 3.26 (vật liệu B). Đối với vật liệu A, các thông số đàn hồi hữu hiệu thay đổi (mô đun đàn hồi hữu hiệu $E_{eff} \in [240;246]$ GPa, hệ số nở hông

hữu hiệu $\nu_{eff} \in [0.29; 0.295]$, mô đun đàn hồi khối hữu hiệu $K_{eff} \in [166.5; 170.0]$ GPa và mô đun đàn hồi trượt hữu hiệu $G_{eff} \in [85.3; 86.4]$ GPa). Đối với vật liệu B, các thông số đàn hồi lớn hơn so với vật liệu A (mô đun đàn hồi hữu hiệu $E_{eff} \in [254.5; 257.5]$ GPa, hệ số nở hông hữu hiệu $\nu_{eff} \in [0.294; 0.297]$, mô đun đàn hồi khối hữu hiệu $K_{eff} \in [174.5; 176.3]$ GPa và mô đun đàn hồi trượt hữu hiệu $G_{eff} \in [85.8; 86.7]$ GPa). Các trị số trung bình thống kê của vật liệu B tăng nhẹ so với vật liệu A như: mô đun đàn hồi hữu hiệu E_{eff} tăng 5.54 %, mô đun đàn hồi khối hữu hiệu K_{eff} tăng 4.32%, mô đun đàn hồi kháng trượt G_{eff} hầu như không ảnh hưởng 0.34 %. Bên cạnh đó, mô đun đàn hồi khối hữu hiệu của hai vật liệu vẫn nằm trong khoảng cận của Voigt và Ruess ($K_V = 189.438$ GPa và $K_R = 153.689$ GPa), mô đun đàn hồi kháng trượt hữu hiệu vẫn nằm trong cận ($G_V = 101.92$ GPa và $G_R = 82.73$ GPa) và mô đun đàn hồi hữu hiệu ($E_V = 259.264$ GPa và $E_R = 210.422$ GPa).



Hình 3.26: Phân bố thông số vật liệu hữu hiệu của mẫu B.

3.6.5 Vật liệu đa tinh thể dị hướng

Vật liệu đa tinh thể dị hướng đóng một vai trò quan trọng trong ngành cơ kỹ thuật vì các vật liệu thể rắn hầu hết được cấu tạo dưới dạng cấu trúc đa tinh thể. Sự xếp chồng ngẫu nhiên các lớp tinh thể với sự phân bố hướng khác nhau thể hiện sự không đồng nhất của vật liệu. Ứng xử của vật liệu vĩ mô chịu tác động lớn bởi sự phân bố kết cấu và hình thái của các tinh thể. Thông số của vật liệu đơn tinh thể đơn giản nhất (tinh thể đối xứng vuông) được xác định với ba thông số độc lập như Nhôm (Al)

$$\mathbf{D}_0^{Al} = \begin{bmatrix} 108.0 & 62.0 & 0 \\ 62.0 & 108.0 & 0 \\ 0 & 0 & 28.3 \end{bmatrix} \text{ (GPa)} \quad (3.32)$$

Ma trận vật liệu hữu hiệu của mỗi tinh thể với hướng ngẫu nhiên α

$$\mathbf{D}_\alpha = \mathbf{T}_\alpha^T \mathbf{D}_0 \mathbf{T}_\alpha \quad (3.33)$$

Với \mathbf{T}_α là ma trận xoay trục theo góc α

Cận Voight và Reuss trong trường hợp tinh thể hình vuông

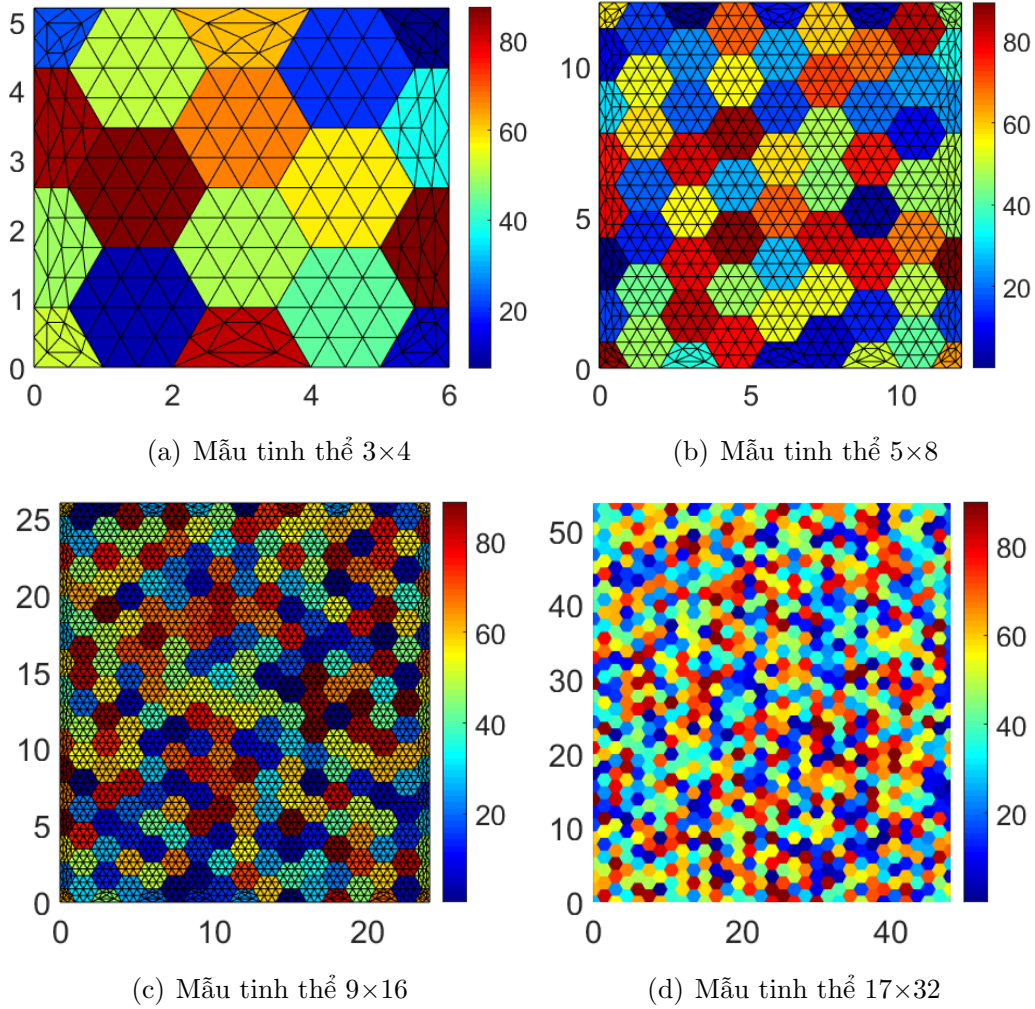
$$K_V = K_R = \frac{D_{11} + D_{12}}{2} \quad (3.34a)$$

$$G_V = \frac{D_{11} - D_{12} + 2 \times D_{33}}{4} \quad (3.34b)$$

$$G_R = \frac{2(D_{11} - D_{12}) \times D_{33}}{D_{11} - D_{12} + 2 \times D_{33}} \quad (3.34c)$$

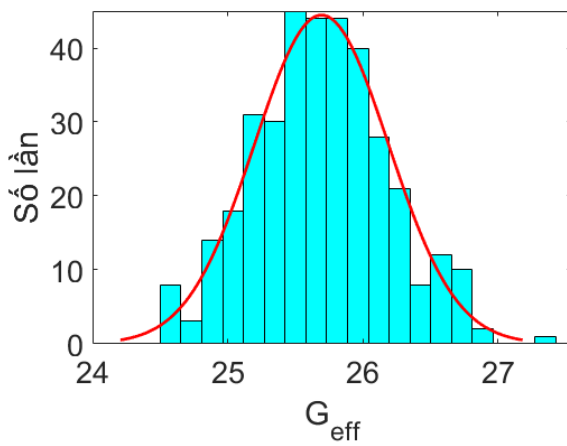
Xem xét vật liệu đa tinh thể lục giác với sự phân bố ngẫu nhiên hướng vật liệu được thể hiện theo hình . Kích thước của phần tử đại diện tăng dần với các lục giác đều có bán kính ngoại tiếp bằng 1.

Mỗi tinh thể lục giác được chia thành 24 phần tử tam giác T3. Hình 3.27(a) gồm 368 phần tử T3 và 406 bậc tự do của bài toán đàn hồi, hình 3.27(b) gồm 1504 phần tử và 1574 bậc tự do, hình 3.27(c) với 6080 phần tử T3 và 6214 bậc tự do của bài toán đàn hồi và hình 3.27(d) với 24448 phần tử T3 và 24710 bậc tự do của bài toán đàn hồi. Biểu đồ phân bố mô đun đàn hồi chịu kéo của các mẫu thử được thể hiện trong hình . Đường cong phân phối chuẩn được ước lượng với độ tin cậy 95% và sai số chuẩn nhỏ hơn 0.02. Qua đó, khi tỉ lệ giữa mỗi tinh thể và kích thước của RVE giảm dần thì biên độ dao động của các giá trị ngẫu nhiên cũng giảm dần. Điều này thể hiện sự giảm yếu tố dị hướng của các tinh thể và mô đun đàn hồi hữu hiệu thay đổi không đáng kể.

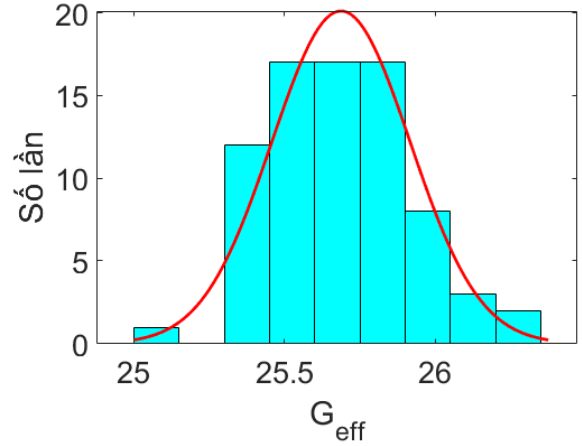


Hình 3.27: Phân bố hướng ngẫu nhiên của vật liệu đa tinh thể $[0;90]$.

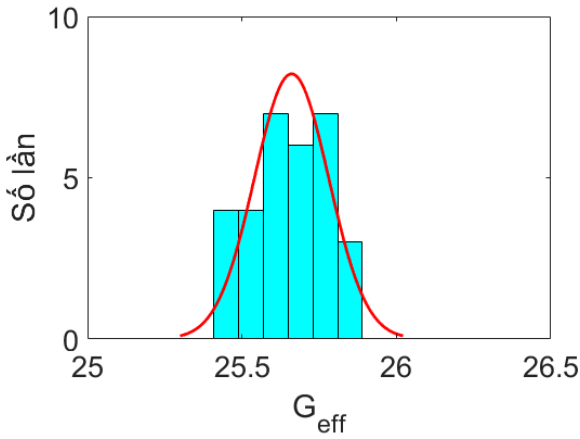
Biên độ dao động của các mô đun đàn hồi hữu hiệu của các mẫu thử ngẫu nhiên khá lớn với trường hợp 3×4 mẫu tinh thể và giảm dần đến 17×32 mẫu tinh thể như hình 3.27. Giá trị trung bình theo thống kê của các trường hợp khá tương đồng với các kết quả giải tích [3]. Qua đó, các đại lượng đặc trưng trung bình theo thống kê được thể hiện bằng bảng 3.11. Mô đun đàn hồi khối hữu hiệu trong các trường hợp đều bằng với $K_0 = K_V = K_R = 85(\text{GPa})$. Mô đun đàn hồi trượt hữu hiệu trung bình giảm dần nhưng vẫn chưa vào khoảng của cận của Hashin và Strikman [3] và Pham [13]. Điều này có thể giải thích về hiện tượng "size effect" hay tỉ lệ giữa kích thước của phần tử đại diện và bán kính của đơn tinh thể. Trường hợp tỉ lệ này nhỏ, sự bất đẳng hướng của vật liệu càng thể hiện rõ và phải thực hiện nhiều mẫu mới có thể hội tụ. Ngược lại, trường hợp tỉ lệ này lớn, kết cấu tuy dị hướng nhưng nhanh chóng hội tụ. Điều này thể hiện các thông số vật liệu sẽ có biên dao động lớn và



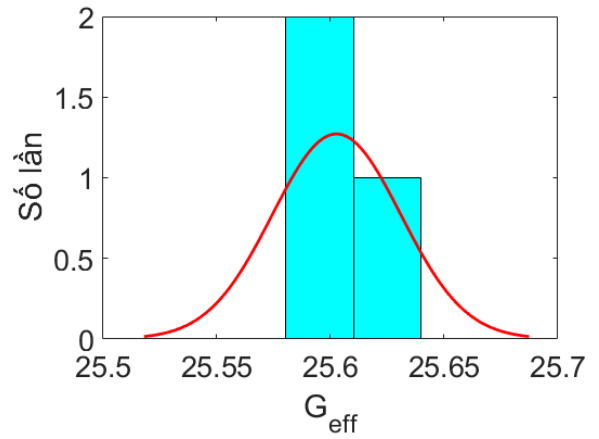
(a) Mẫu tinh thể 3×4



(b) Mẫu tinh thể 5×8



(c) Mẫu tinh thể 9×16



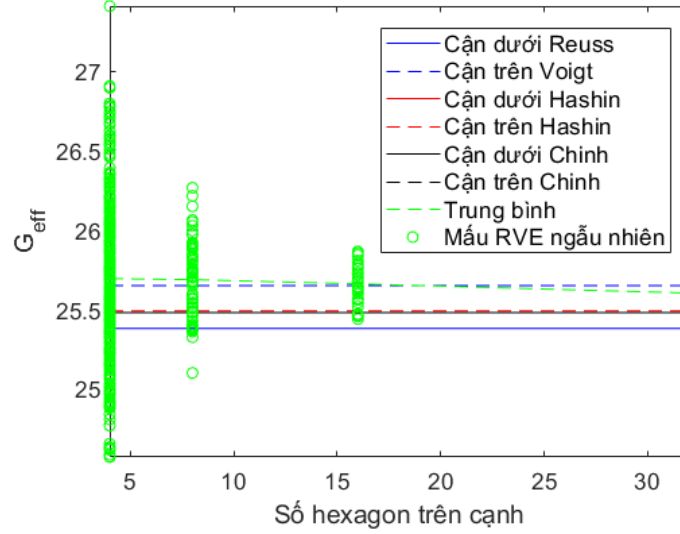
(d) Mẫu tinh thể 17×32

Hình 3.28: Phân bố của mô đun đàn hồi trượt hữu hiệu của đa tinh thể nhôm (Al).

nằm ngoài vùng dự đoán của các phương pháp giải tích. Đây là điểm mạnh của hướng tiếp cận số, các thông số vật liệu sẽ xác định theo một phân bố hướng ngẫu nhiên cụ thể và được thống kê lại. Việc này sẽ dẫn đến tiết kiệm khi thực hiện các thí nghiệm ở cấp độ vi mô để xác định các thông số hữu hiệu của vật liệu.

Bảng 3.11: Các thông số đàn hồi hữu hiệu của đa tinh thể nhôm.

	D_{11}^{eff}	D_{12}^{eff}	K_{eff}	G_{eff}	G_{HS}^L	G_{HS}^U
Al(3 × 4)	110.606	59.394	85.00	25.694		
Al(5 × 8)	110.613	59.387	85.00	25.687	25.48	25.49
Al(9 × 16)	110.639	59.361	85.00	25.661		
Al(17 × 32)	110.697	59.303	85.00	25.603		



Hình 3.29: Mô đun đàn hồi kháng trượt hữu hiệu của đa tinh thể nhôm dị hướng.

Các thông số đàn hồi hữu hiệu như mô đun kháng trượt G_{eff} có giá trị nhỏ hơn so với đơn tinh thể. Việc phân bố ngẫu nhiên hướng của các tinh thể làm giảm yếu khả năng chịu lực của vật liệu. Bên cạnh đó, những trường hợp mà các hằng số vật liệu nằm ngoài các cận của nghiên cứu theo phương pháp nguyên lý biến phân. Điều này giúp xác định ngưỡng khi tỉ lệ giữa đơn tinh thể và kích thước của phần tử đại diện mà vật liệu dị hướng có thể xem gần như là đẳng hướng. Vì các thay đổi hướng của đơn tinh thể không còn ảnh hưởng lớn đến các đặc trưng vật liệu hữu hiệu của phần tử đại diện. Ngoài ra, khi xem xét về mô đun đàn hồi khối hữu hiệu K_{eff} thì hầu như không thay đổi đối với vật liệu tinh thể đối xứng vuông như nhôm.

3.7 Kết luận bài toán tám phẳng vi mô trong miền đàn hồi

Trong chương này, kỹ thuật đồng nhất hóa được xây dựng cho bài toán phần tử đại diện tám phẳng trong miền đàn hồi. Qua đó, các hằng số vật liệu hữu hiệu được xác định với các dạng vật liệu có cấu trúc tuần hoàn (vật liệu cốt sợi hình chữ nhật, vật liệu cốt sợi hình tròn, vật liệu có lỗ rỗng tròn) và các vật liệu phân bố ngẫu nhiên (vật liệu có cơ lý biến thiên FGM và vật liệu đa tinh thể dị hướng). Đối với vật liệu có cấu trúc tuần hoàn, các hằng số mô đun đàn hồi hữu hiệu E_{eff} , hệ số nở hông hữu hiệu ν_{eff} , mô đun đàn hồi khối K_{eff} và mô đun đàn hồi kháng trượt G_{eff} được tính toán thông qua kỹ thuật trung bình hoá thể tích phần tử đại diện (RVE). Các kết quả đạt được tương đồng với các nghiên cứu giải tích và phương

pháp số FE². Đối với các vật liệu có phân bố ngẫu nhiên theo qui luật (Vật liệu có cơ lý biến thiên FGM) và vật liệu phân bố ngẫu nhiên hoàn toàn (vật liệu đa tinh thể dị hướng) thì các thông số vật liệu hữu hiệu này được thể hiện sự phân bố các trường hợp ngẫu nhiên và được trung bình theo thống kê. Một lưu ý cần xem xét khi lựa chọn tỷ lệ giữa kích thước của phần tử đại diện và kích thước của các pha vật liệu bên trong. Khi tỷ lệ này nhỏ, mặc dù từng loại vật liệu nên được xem như đồng nhất và đẳng hướng, nhưng vật liệu được đồng nhất hóa có thể là được xem như đồng nhất nhưng dị hướng. Khi tỷ lệ này đủ lớn, sự phân bố các pha vật liệu ảnh hưởng không đáng kể về các hằng số hữu hiệu nên có thể xem như vật liệu đồng nhất và đẳng hướng như các hướng tiếp cận lý thuyết.

Công bố liên quan đến bài toán tấm phẳng vi mô trong miền đàn hồi:

1. **P.H. Nguyen**, C.V. Le, & K.T. Nguyen. "Xác định đặc trưng hữu hiệu của vật liệu đa tinh thể dị hướng bằng phương pháp đồng nhất hóa". *Tạp Chí Khoa Học Công Nghệ Xây Dựng (KHCNXD) - ĐHXD*, 13(4V), 129-138, 2019. [https://doi.org/10.31814/stce.nuce2019-13\(4V\)-12](https://doi.org/10.31814/stce.nuce2019-13(4V)-12).
2. **P.H. Nguyen**, C.V. Le, & Phuc, H. L. H. (2020). "Kỹ thuật đồng nhất hóa cho vật liệu đa tinh thể dị hướng sử dụng phần tử biên tỉ lệ". *Tạp Chí Khoa Học Công Nghệ Xây Dựng (KHCNXD) - ĐHXD*.

Một trong vấn đề mà gặp phải khi sử dụng tấm phẳng vi mô hai chiều là chưa kể đến được sự thay đổi vật liệu theo bề dày tấm. Điều này có thể giải quyết bằng mô hình phần tử đại diện không gian ba chiều được xây dựng với sáu bậc tự do tại mỗi nút. Với việc mở rộng mô hình không gian ba chiều cho phần tử đại diện nhằm mô phỏng chính xác các mô hình vật liệu hay sự phân bố các pha vật liệu khác nhau. Sự thay đổi của vật liệu trên bề dày của tấm được xem xét cụ thể hơn trong các ví dụ. Phần tử đại diện ba chiều trong bài toán đa tỉ lệ đàn hồi sẽ được xem xét trong chương tiếp theo.

Chương 4

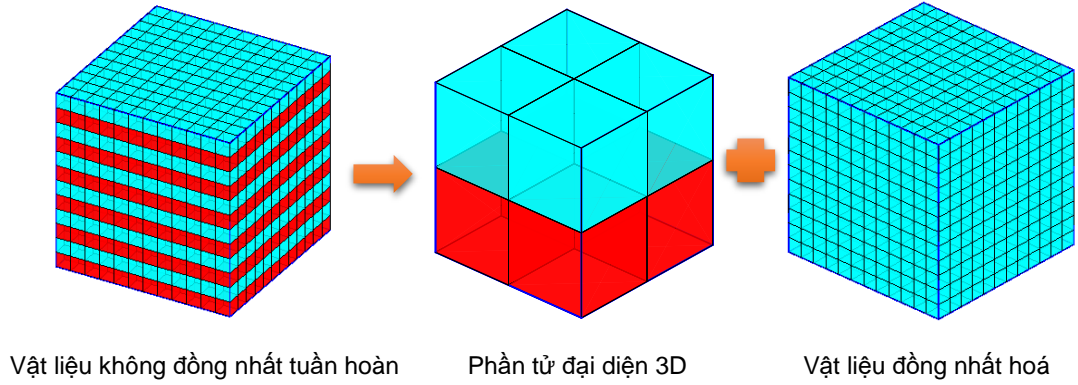
Bài toán đa tỉ lệ đàn hồi với phần tử đại diện 3D

4.1 Giới thiệu

Mô hình phần tử đại diện 3D ngày càng thu hút sự chú ý của các nghiên cứu trong ngành cơ kỹ thuật. Với sự phát triển của máy tính và kỹ thuật mô phỏng, mô hình phần tử đại diện không gian ba chiều được sử dụng nhằm mô tả một cách chân thật cấu trúc của vật liệu như là sự phân bố hướng của các miền trong một vật liệu, sự pha trộn của các pha vật liệu khác nhau của cấp độ vi mô hay sự phân bố ngẫu nhiên của các lỗ rỗng. Mô hình phần tử đại diện ba chiều cho Vật liệu đa tinh thể được thực hiện bởi kỹ thuật ghép hình ảnh hai chiều từ máy quét hiển vi điện tử SEM (Scanning Electron Microscopy) hay TEM (Transmission Electron Microscopy) thành kết cấu ba chiều. Qua đó, độ chính xác tùy thuộc vào tỷ lệ mà các nghiên cứu hướng đến. Các nghiên cứu đã được thực hiện cho vật liệu đa tinh thể với kỹ thuật chia thành các miền vorronoi (vật liệu kim loại [64–66], vật liệu gốm [67, 68], vật liệu đá [69–71], vật liệu băng [72, 73]). Mô hình phần tử đại diện ba chiều khi xem xét sự pha trộn giữa hai pha vật liệu [74, 75]. Mô hình vật liệu với lỗ rỗng được thực hiện trong các nghiên cứu [76]. Tuy nhiên, các nghiên cứu cho phần tử đại diện ba chiều cho kết cấu tấm còn ít nghiên cứu thực hiện. Phần tử đại diện cho tấm mỏng và dày được thực hiện bởi [77]. Nghiên cứu khác cho tấm mindlin được thực hiện bởi [78]. Trong chương này, mô hình phần tử đại diện ba chiều được trình bày. Điều kiện biên tuần hoàn được áp đặt trên sáu mặt đối xứng. Bên cạnh đó, biến dạng cong κ_M của cấp độ vĩ mô được chuyển thành điều kiện biên chuyển vị cưỡng bức cho phần tử đại diện ba chiều. Các thông số đàn hồi hữu hiệu của vật liệu không đồng nhất và bất đẳng hướng được xác định thông qua kỹ thuật đồng nhất hóa cho mô hình phần tử đại diện.

4.2 Phân tử đại diện không gian 3D

Việc xem xét một khối vật thể ba chiều không đồng nhất liên tục $\Omega \in V^3$ được thay thế bằng một khối đồng nhất liên tục $\Omega_M \in V^3$ tương đương và tại mỗi điểm vật liệu sẽ có một kết cấu vi mô không đồng nhất $\Omega_m \in V^3$ kèm theo như hình 4.1.



Hình 4.1: Phương pháp đa tỉ lệ với phân tử đại diện 3D

4.3 Điều kiện biên bài toán phân tử đại diện 3D

Trong trường hợp bài toán 3D, trường chuyển vị hằng số của bài toán vi mô được xác định thông qua biến dạng tại điểm vật liệu vĩ mô

$$\bar{\mathbf{u}} = \bar{\boldsymbol{\epsilon}}_M \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & 0.5 \times \epsilon_{12} & 0.5 \times \epsilon_{13} \\ 0.5 \times \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & 0.5 \times \epsilon_{23} \\ 0.5 \times \epsilon_{31} & 0.5 \times \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} \quad (4.1)$$

Chuyển vị của nút ở góc được xác định như sau

$$\bar{\mathbf{u}}_i = \begin{bmatrix} X_1 & 0 & 0 & 0.5 \times X_2 & 0 & 0.5 \times X_3 \\ 0 & X_2 & 0 & 0.5 \times X_1 & 0.5 \times X_3 & 0 \\ 0 & 0 & X_3 & 0 & 0.5 \times X_2 & 0.5 \times X_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{13} \end{Bmatrix} = \mathbf{T}_P^i \bar{\boldsymbol{\epsilon}}_M \quad (4.2)$$

Trong trường hợp bài toán tấm 3D chịu uốn, mối liên hệ giữa trường chuyển vị hằng số của cấp độ vi mô và biến dạng cong tại điểm vật liệu vĩ mô được viết lại như sau.

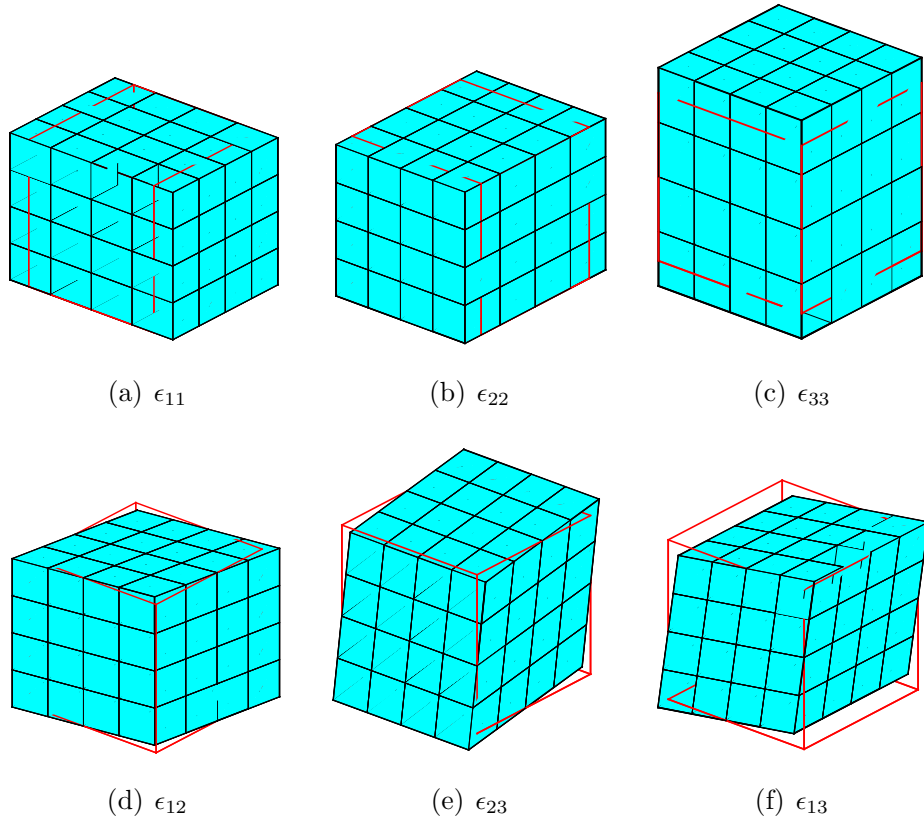
$$\bar{\mathbf{u}} = \kappa \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \kappa_{11} & \kappa_{12} & 0 \\ \kappa_{21} & \kappa_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} \quad (4.3)$$

Chuyển vị của nút tại góc của phần tử đại diện RVE 3D được tính

$$\bar{\mathbf{u}}_b = \left[T_P^1 \ T_P^2 \ T_P^3 \ T_P^4 \ T_P^5 \ T_P^6 \ T_P^7 \ T_P^8 \right]^T \bar{\boldsymbol{\epsilon}}_M = \mathbf{T}_P \bar{\boldsymbol{\epsilon}}_M \quad (4.4)$$

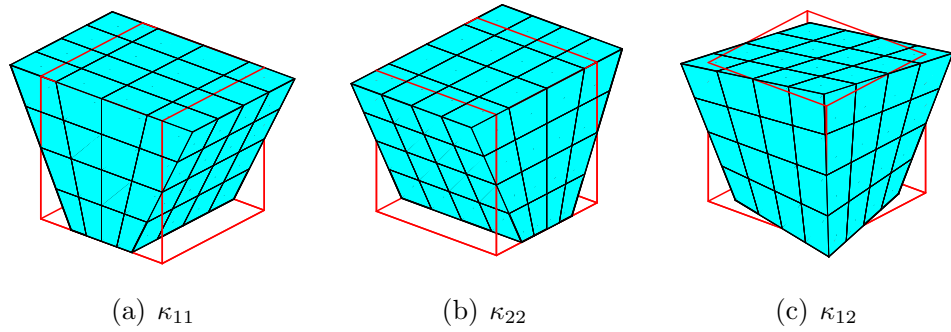
4.4 Các dạng chuyển vị của RVE 3D

Chuyển vị tương ứng của phần tử đại diện 3D với các biến dạng độc lập từ điểm vật liệu của bài toán cấp độ vĩ mô được thể hiện như sau



Hình 4.2: Chuyển vị tương ứng RVE 3D với các mode biến dạng từ cấp độ vĩ mô

Các trường chuyển vị tương ứng của phần tử đại diện 3D tấm chịu uốn



Hình 4.3: Chuyển vị tương ứng của phần tử đại diện của tấm 3D chịu uốn

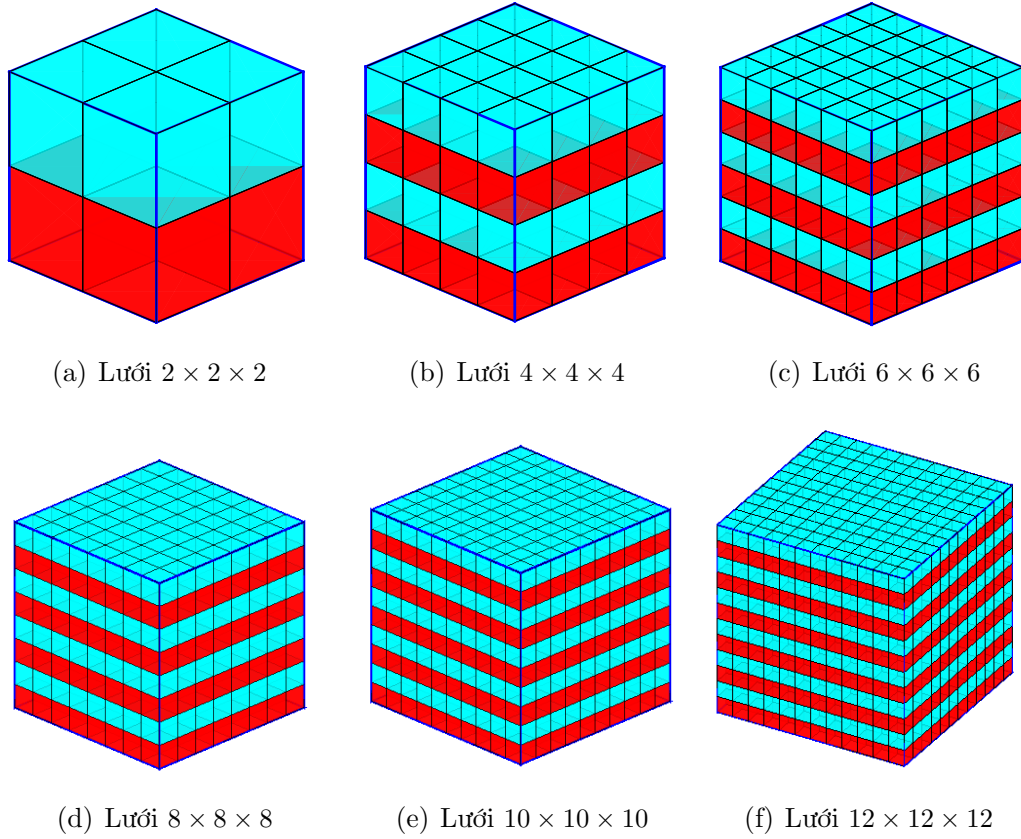
4.5 Ví dụ số

4.5.1 Vật liệu đứng, ngang và xen kẽ

vật liệu với phần tử đại diện có kích thước chuẩn $1 \times 1 \times 1$ được khảo sát. Hai pha vật liệu có các hằng số như sau: $E_1 = 2e6$ MPa, $E_2 = 2e7$ MPa, $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$. Ma trận hằng số vật liệu \mathbf{D} của bài toán vĩ mô được xác định qua kỹ thuật đồng nhất hoá trên thể tích của phần tử đại diện vi mô. Ba mô hình vật liệu vi mô được thực hiện với mẫu đầu tiên vật liệu phân bố theo phương ngang như hình 4.4, mẫu tiếp theo là vật liệu phân bố theo phương đứng như hình 4.5 và mẫu cuối cùng là vật liệu phân bố xen kẽ như hình 4.6.

Các mẫu phần tử đại diện 3D được xem xét với các trường hợp kích thước của mẫu vật liệu đơn vị giảm dần để đánh giá sự ảnh hưởng kích thước (size effect) của bài toán. Mẫu vật liệu đứng và vật liệu ngang được tạo lưới lần lượt theo độ tăng dần của số lưới (mô hình $2 \times 2 \times 2$ có 8 phần tử H8 và 81 bậc tự do, mô hình $4 \times 4 \times 4$ có 64 phần tử H8 và 375 bậc tự do, mô hình $6 \times 6 \times 6$ có 216 phần tử H8 và 1029 bậc tự do, mô hình $8 \times 8 \times 8$ có 512 phần tử H8 và 2187 bậc tự do, mô hình $10 \times 10 \times 10$ có 1000 phần tử H8 và 3993 bậc tự do và mô hình $12 \times 12 \times 12$ có 1728 phần tử có 6591 bậc tự do). Các kết quả ma trận hằng số vật liệu hữu hiệu của vật liệu phân bố ngang được thể hiện trong Bảng 4.1, vật liệu phân bố dọc được thể hiện trong Bảng 4.2 và vật liệu xen kẽ được thể hiện trong Bảng 4.3. Qua đó, xu hướng của hằng số $D_{11} = D_{22} \neq D_{33}$ (đối với vật liệu phân bố ngang); $D_{11} \neq D_{22} = D_{33}$ (đối với vật liệu phân bố dọc) và $D_{11} = D_{22} = D_{33}$ (đối với vật liệu phân bố xen kẽ). Điều này thể hiện tính đẳng hướng của vật liệu xen kẽ và bất đẳng hướng của hai vật liệu còn lại. Độ cứng theo phương phân bố vật liệu lớn hơn so với độ cứng kéo vuông góc.

Bên cạnh đó, khi kích thước các lớp vật liệu mỏng dần thì các thông số vật liệu



Hình 4.4: Lưới phần tử đại diện 3D phân bố vật liệu ngang.

cũng dần hội tụ đối với điều kiện biên tuyến tính. Tuy nhiên, điều kiện biên tuần hoàn nhanh chóng hội tụ đối với vật liệu phân bố lớp ngang và lớp đứng. Chênh lệch của mô đun đàn hồi dọc trục D_{11} khi sử dụng hai điều kiện biên với lưới $12 \times 12 \times 12$ là 7.16 % (đối với vật liệu phân bố ngang và vật liệu phân bố đứng) và 1.59% (đối với vật liệu phân bố xen kẽ) trong Hình 4.7.

Mô đun đàn hồi khối hữu hiệu K_{eff} của kết cấu vi mô không gian 3D [79] được xác định theo công thức

$$K_{eff} = \frac{D_{11} + D_{22} + D_{33} + 2 \times D_{12} + 2 \times D_{13} + 2 \times D_{23}}{9} \quad (4.5)$$

Mô đun đàn hồi khối được khảo sát sự thay đổi khi các lớp vật liệu mỏng dần trong Hình 4.8. Qua đó, mô đun đàn hồi khối giảm dần và hội tụ (điều kiện biên tuyến tính) và hằng số (điều kiện biên tuần hoàn) đối với hai vật liệu phân bố ngang và phân bố dọc. Đối với vật liệu phân bố xen kẽ, mô đun đàn hồi khối hữu hiệu giảm dần (điều kiện biên tuyến tính) và tăng dần (điều kiện biên tuần hoàn). Qua đó, đối với trường hợp tách biệt các pha vật liệu thì việc áp dụng điều kiện

Bảng 4.1: Ma trận hằng số vật liệu của RVE 3D vật liệu phân bố lớp ngang.

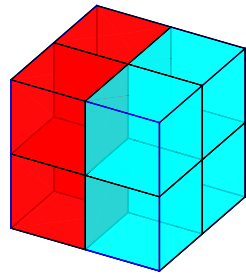
	BTD	D_{11}	D_{22}	D_{33}	D_{44}	D_{55}	D_{66}	D_{12}	D_{13}	D_{23}
Biên tuyến tính	81	14.156	14.156	11.259	4.231	3.941	3.941	5.694	4.825	4.825
	375	13.604	13.604	8.253	4.231	2.914	2.914	5.142	3.537	3.537
	1029	13.395	13.395	7.114	4.231	2.399	2.399	4.933	3.049	3.049
	2187	13.289	13.289	6.541	4.231	2.130	2.130	4.828	2.803	2.803
	3993	13.227	13.227	6.200	4.231	1.970	1.970	4.765	2.657	2.657
	6591	13.185	13.185	5.975	4.231	1.865	1.865	4.724	2.561	2.561
Biên tuần hoàn	-	12.987	12.987	4.895	4.231	1.399	1.399	4.525	2.098	2.098

Bảng 4.2: Ma trận hằng số vật liệu của RVE 3D vật liệu phân bố lớp đứng.

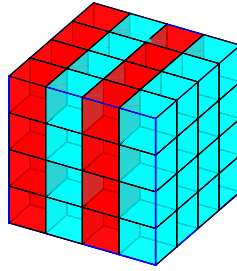
	BTD	D_{11}	D_{22}	D_{33}	D_{44}	D_{55}	D_{66}	D_{12}	D_{13}	D_{23}
Biên tuyến tính	81	11.259	14.156	14.156	3.941	4.231	3.941	4.825	4.825	5.694
	375	8.253	13.604	13.604	2.914	4.231	2.914	3.537	3.537	5.142
	1029	7.114	13.395	13.395	2.399	4.231	2.399	3.049	3.049	4.933
	2187	6.541	13.289	13.289	2.130	4.231	2.130	2.803	2.803	4.828
	3993	6.200	13.227	13.227	1.970	4.231	1.970	2.657	2.657	4.765
	6591	5.975	13.185	13.185	1.865	4.231	1.865	2.561	2.561	4.724
Biên tuần hoàn	-	4.895	12.987	12.987	1.398	4.231	1.398	2.098	2.098	4.525

Bảng 4.3: Ma trận hằng số vật liệu của RVE 3D vật liệu phân bố xen kẽ.

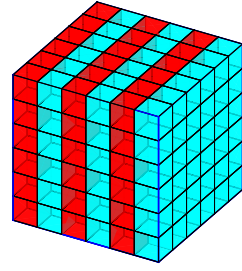
	BTD	D_{11}	D_{22}	D_{33}	D_{44}	D_{55}	D_{66}	D_{12}	D_{13}	D_{23}
Biên tuyến tính	192	15.256	15.256	15.256	4.359	4.359	4.359	6.538	6.538	6.538
	648	14.905	14.905	14.905	4.258	4.258	4.258	6.388	6.388	6.388
	1536	14.843	14.843	14.843	4.241	4.241	4.241	6.361	6.361	6.361
	3000	14.824	14.824	14.824	4.235	4.235	4.235	6.353	6.353	6.353
	5184	14.817	14.817	14.817	4.233	4.233	4.233	6.350	6.350	6.350
	8232	14.813	14.813	14.813	4.232	4.232	4.232	6.349	6.349	6.349
Biên tuần hoàn	192	13.052	13.052	13.052	4.041	4.041	4.041	5.328	5.328	5.328
	648	13.907	13.907	13.907	4.081	4.081	4.081	5.737	5.737	5.737
	1536	14.285	14.285	14.285	4.134	4.134	4.134	5.977	5.977	5.977
	3000	14.470	14.470	14.470	4.165	4.165	4.165	6.103	6.103	6.103
	5184	14.573	14.573	14.573	4.184	4.184	4.184	6.175	6.175	6.175
	8232	14.635	14.635	14.635	4.195	4.195	4.195	6.219	6.219	6.219



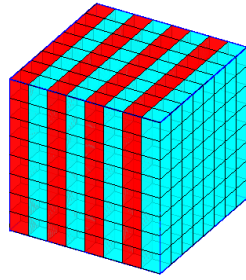
(a) Lưới $2 \times 2 \times 2$



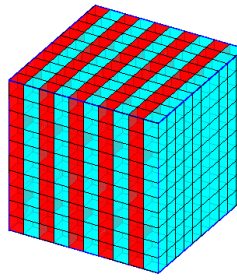
(b) Lưới $4 \times 4 \times 4$



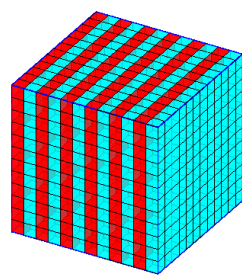
(c) Lưới $6 \times 6 \times 6$



(d) Lưới $8 \times 8 \times 8$

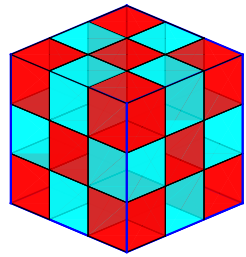


(e) Lưới $10 \times 10 \times 10$

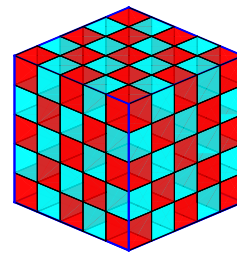


(f) Lưới $12 \times 12 \times 12$

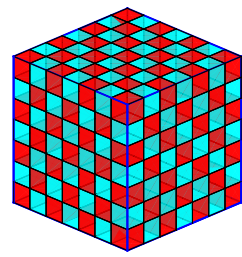
Hình 4.5: Lưới phần tử đại diện 3D phân bố vật liệu đứng



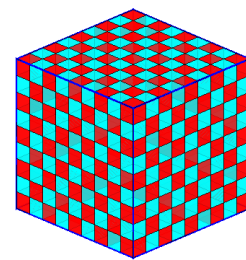
(a) Lưới $3 \times 3 \times 3$



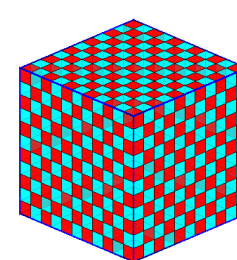
(b) Lưới $5 \times 5 \times 5$



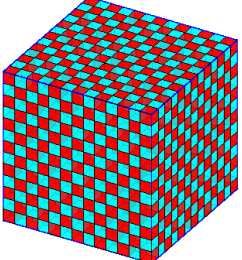
(c) Lưới $7 \times 7 \times 7$



(d) Lưới $9 \times 9 \times 9$

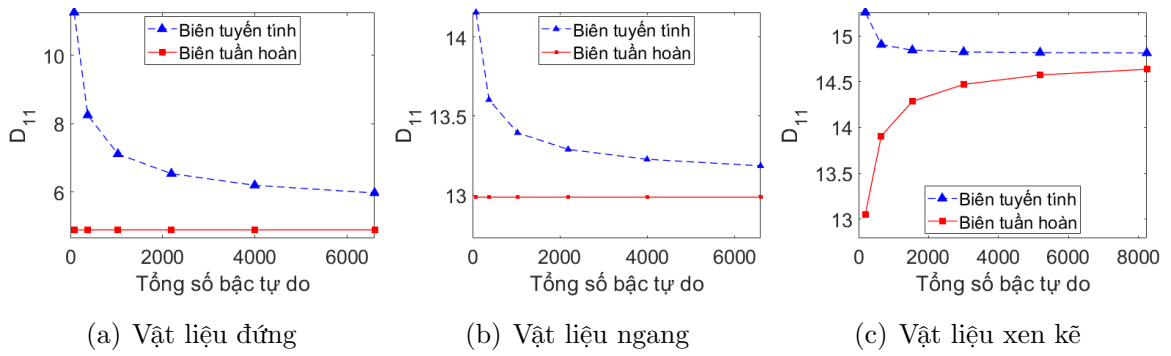


(e) Lưới $11 \times 11 \times 11$



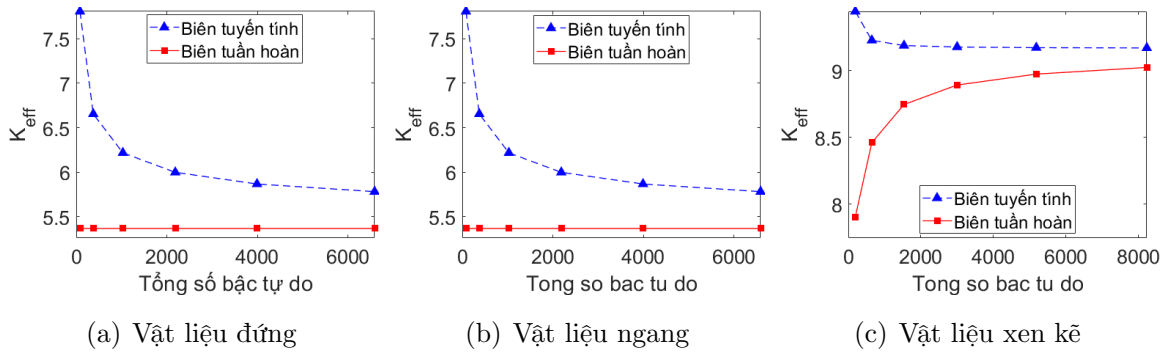
(f) Lưới $13 \times 13 \times 13$

Hình 4.6: Lưới phần tử đại diện 3D phân bố vật liệu xen kẽ



Hình 4.7: Mô đun đàn hồi dọc trục D_{11} hữu hiệu khi bề dày mỗi lớp giảm dần.

biên tuần hoàn nhanh chóng hội tụ kết quả số. Tuy nhiên, khi trộn lẫn các pha vật liệu với nhau thì tỷ lệ giữa kích thước cốt liệu và kích thước của phần tử đại diện (RVE) cần phải đủ nhỏ để các thông số đàn hồi hữu hiệu hội tụ.



Hình 4.8: Mô đun đàn hồi khối hữu hiệu K_{eff} khi bề dày mỗi lớp giảm dần.

4.5.2 Kết cấu tấm chịu uốn nhiều lớp

Một phần tử đại diện tấm 3D laminate 4 lớp với kích thước tấm vi mô là $0.2 \times 0.2 \times 0.2$ inch. Hai mô hình vật liệu được xem xét là vật liệu hướng sợi chữ thập $[0/90/90/0]$ và vật liệu hướng sợi xiên góc $[0/45/45/0]$. Bề dày của mỗi lớp là 0.05 inch. Thuộc tính hữu hiệu của mỗi lớp được tính toán dựa trên vật liệu IM7 graphite/8551 epoxy như sau:

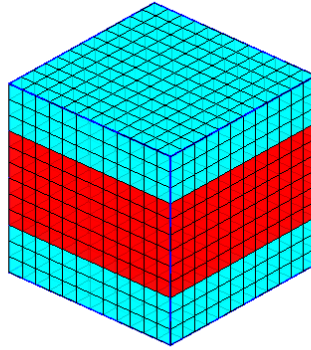
$$E_{11} = 22.50E6 \text{ PSI}, E_{22} = 1.20E6 \text{ PSI}, E_{33} = 1.20E6 \text{ PSI}$$

$$E_{12} = 0.70E6 \text{ PSI}, E_{13} = 0.70E6 \text{ PSI}, E_{23} = 0.53E6 \text{ PSI}$$

$$\nu_{12} = 0.33, \nu_{13} = 0.33, \nu_{23} = 0.31$$

Phần tử đại diện 3D được mô hình với lưới $12 \times 12 \times 12$ phần tử H8 được thể

hiện trong hình 4.9.



Hình 4.9: Hệ lưới phần tử $12 \times 12 \times 12$ H8 của tấm laminate 4 lớp

Bảng 4.4: Ma trận hằng số vật liệu của RVE tấm hướng sợi chữ thập (cross ply)

Hướng cốt sợi từng lớp [0/90/90/0]					
Nghiên cứu này					
121.110	5.868	5.051	0	0	0
5.868	121.110	5.051	0	0	0
5.051	5.051	13.420	0	0	0
0	0	0	6.150	0	0
0	0	0	0	6.150	0
0	0	0	0	0	7
Mô hình Chou [80]					
121.1	5.883	5.051	0	0	0
5.883	121.1	5.051	0	0	0
5.051	5.051	13.42	0	0	0
0	0	0	6.033	0	0
0	0	0	0	6.033	0
0	0	0	0	0	7
Mô hình Alexander [81]					
121.1	5.883	5.051	0	0	0
5.883	121.1	5.051	0	0	0
5.051	5.051	13.42	0	0	0
0	0	0	4.413	0	0
0	0	0	0	4.413	0
0	0	0	0	0	7

Các kết quả số đạt được có sự tương đồng khi so sánh với kết quả nghiên cứu [80, 81]. Ma trận hằng số vật liệu đàn hồi hữu hiệu của vật liệu hướng sợi chữ thập được thể hiện trong bảng 4.4 và vật liệu hướng sợi xiên được thể hiện trong bảng 4.5. Đối với vật liệu hướng sợi chữ thập, các thông số của ma trận hằng số vật liệu hữu hiệu trùng khớp với nghiên cứu của Chou [80] và Alexander [81]. Mô đun đàn hồi kháng cắt D_{44} chênh lệch 1.94 % với nghiên cứu của Chou [80] và 28.24 % với nghiên cứu của Alexander [81]. Đối với vật liệu hướng sợi xiên, mô đun đàn hồi kháng cắt D_{44} chênh lệch 13.59 % với nghiên cứu của Chou [80] và 37.09 % đối với nghiên cứu của Alexander [81]. Qua đó, việc áp đặt điều biên biên tuyến tính cho phần tử đại diện 3D cho kết cấu tấm chịu uốn đạt sự trùng khớp .

Bảng 4.5: Ma trận hằng số vật liệu của RVE tấm hướng sợi xiên (angle ply)

Hướng cốt sợi từng lớp [0/45/45/0]					
Nghiên cứu này					
127.58	19.66	5.199	0	0	20.15
19.66	19.95	5.051	0	0	20.17
5.199	5.051	13.42	0	0	0.2944
0	0	0	6.562	0.4377	0
0	0	0	0.4377	6.562	0
20.15	20.17	0.2944	0	0	27.28
Mô hình Chou [80]					
149.7	31.17	5.444	0	0	26.94
31.17	41.94	4.658	0	0	26.92
5.444	4.658	13.42	0	0	0.3933
0	0	0	5.670	0.421	0
0	0	0	0.421	6.512	0
26.94	26.92	0.3933	0	0	32.31
Mô hình Alexander [81]					
149.7	31.17	5.444	0	0	26.94
31.17	41.94	4.658	0	0	26.92
5.444	4.658	13.42	0	0	0.3933
0	0	0	4.128	0.227	0
0	0	0	0.227	4.637	0
26.94	26.92	0.3933	0	0	32.31

4.5.3 Kết cấu tấm 3D chịu uốn có cơ lý biến thiên

Vật liệu có cơ lý biến thiên được chú ý với sự chuyển tiếp giữa hai pha vật liệu nhằm giảm sự bất liên tục về ứng suất. Bên cạnh đó, việc kết hợp được vật liệu kim loại (khả năng chịu lực tốt) và vật liệu gốm (khả năng chịu nhiệt tốt) nhằm đáp ứng được các kết cấu có yêu cầu chuyên biệt. Thuộc tính của hai pha vật liệu (Al_2O_3 và ZrO_2) được xác định theo Bảng 4.6.

Mẫu vật liệu A: được phân thành 3 lớp như hình 4.10 bao gồm lớp lớp trên là kim loại từ $z_1 = 0.5h$ đến $z_2 = 0.3h$, lớp chuyển tiếp giữa kim loại và gốm từ $z_2 = 0.3h$ đến $z_3 = -0.3h$ và lớp đáy là gốm từ $z_3 = -0.3h$ đến $z_4 = -0.5h$. Tỷ lệ thể tích của vật liệu gốm V_{Zir} được xác định theo

$$V_{Zir}(z) = \begin{cases} 0 & \text{khi } z \in [0.3 \times h; 0.5 \times h] & (4.6a) \\ \frac{z - z_2}{z_2 - z_3} & \text{khi } z \in [-0.3 \times h; 0.3 \times h] & (4.6b) \\ 1 & \text{khi } z \in [-0.5 \times h; -0.3 \times h] & (4.6c) \end{cases}$$

Mẫu vật liệu B: một lớp biến thiên như hình 4.11 từ kim loại ở mặt đáy đến gốm ở mặt trên. Tỷ lệ thể tích của vật liệu gốm V_c được xác định theo

$$V_{Zir}(z) = \left(\frac{2z + h}{2h} \right)^p \quad (4.7)$$

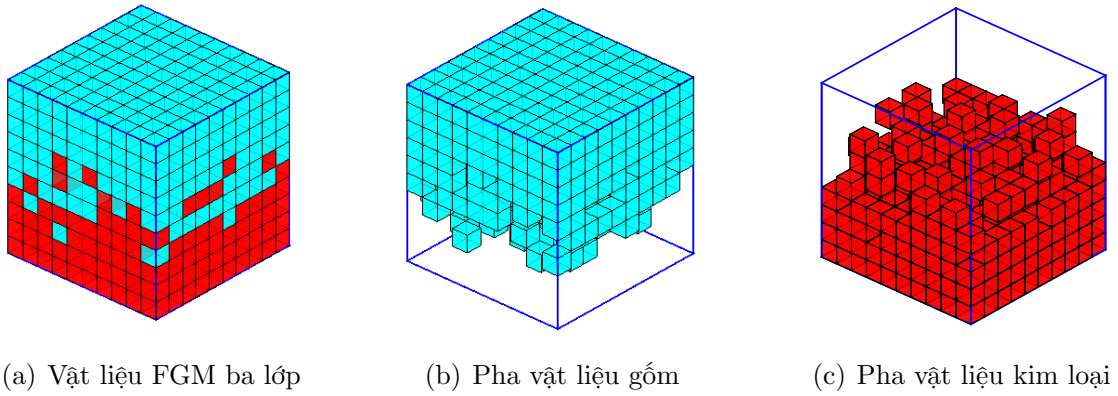
với p là tham số vật liệu và z là tọa độ lớp khảo sát.

Bảng 4.6: Đặc trưng vật liệu kim loại(Al_2O_3) và gốm (ZrO_2)

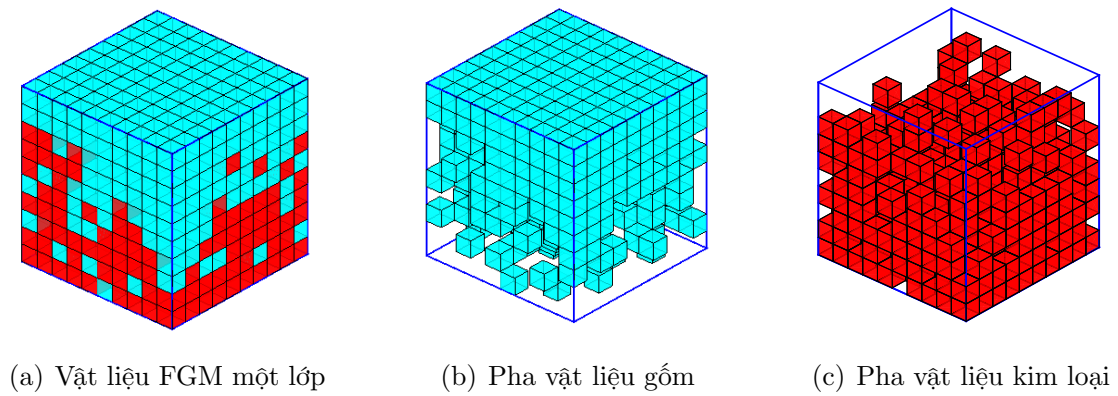
Vật liệu	Module E (Gpa)	Hệ số nở hông
kim loại(Al_2O_3)	150	0.3
gốm (ZrO_2)	380	0.3

Các thông số ma trận hằng vật liệu hữu hiệu của hai mẫu vật liệu A và B, được thể hiện trong Bảng 4.7 với chênh lệch nhỏ (D_{11} của mẫu B lệch 0.81% so với mẫu A). Điều này ảnh hưởng do việc cùng chọn hàm mật độ thể tích tuyến tính theo chiều dày của tấm. Đồng thời khi so sánh với việc ước lượng tuyến tính và trung bình của thống kê sai biệt nhỏ như trên hình 4.12 (D_{11} của mẫu A là 0.9 % so với trung bình, D_{11} của mẫu B là 0.42 % so với trung bình). Theo một cách tổng quát thì hai mẫu vật liệu có khả năng chịu tải trọng cơ là tương đương.

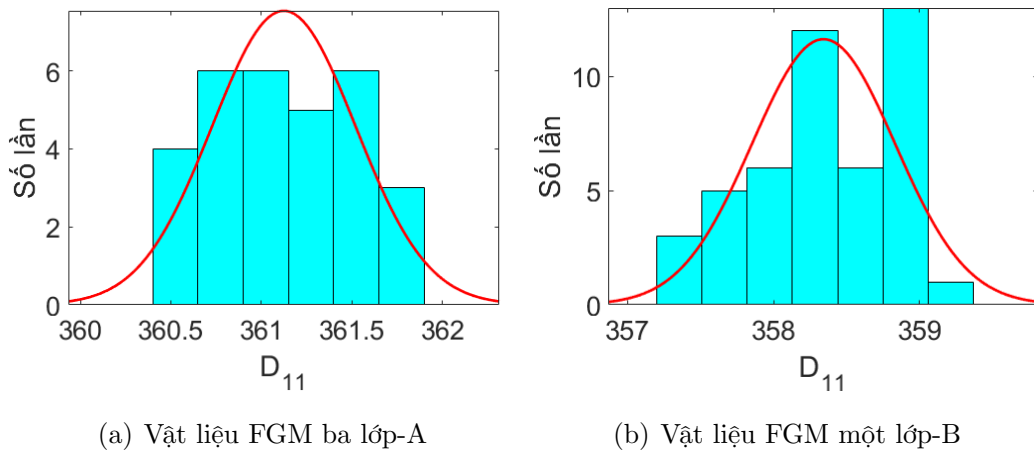
Sau khi xem xét sự tương đương về khả năng chịu lực của hai mẫu A và mẫu B, chúng ta nên chọn mẫu vật liệu A vì tận dụng được lớp trên là alumina Al_2O_3 chịu



Hình 4.10: Hệ lưới phần tử của phần tử đại diện 3D của vật liệu A.



Hình 4.11: Hệ lưới phần tử của phần tử đại diện 3D của vật liệu B.



Hình 4.12: Thống kê mô đun chịu kéo D_{11} trên mẫu đại diện 3D của tấm FGM.

tốt tải trọng cơ trên lớp mặt và lớp dưới là gốm ZrO_2 có thể chịu tốt về tải trọng nhiệt.

Bảng 4.7: Ma trận hằng số vật liệu hữu hiệu của mẫu FGM một lớp và ba lớp.

Vật liệu	D_{11}	D_{22}	D_{33}	D_{44}	D_{55}	D_{66}	D_{12}	D_{13}	D_{23}
Gốm	201.92	201.92	201.92	57.69	57.69	57.69	86.54	86.54	86.54
Kim loại	511.54	511.54	511.54	146.15	146.15	146.15	219.23	219.23	219.23
Trung bình	356.73	356.73	356.73	101.92	101.92	101.92	152.88	152.88	152.88
Mẫu A	358.23	358.38	342.14	103.79	102.17	102.15	149.65	144.81	144.84
Mẫu B	355.34	355.06	346.14	102.65	101.69	101.78	148.02	145.36	145.28

4.6 Kết luận bài toán đa tỉ lệ đàn hồi với phần tử đại diện 3D

Chương này đã trình bày phương pháp đa tỉ lệ khi sử dụng phần tử đại diện 3D với hai trường hợp (mẫu 3D cho vật liệu tuần hoàn và mẫu 3D cho kết cấu tấm chịu uốn). Trường hợp mẫu 3D cho vật liệu tuần hoàn, biến dạng ϵ từ cấp độ vĩ mô được chuyển thành chuyển vị cưỡng bức trên biên của phần tử đại diện 3D. Trường hợp mẫu 3D cho kết cấu tấm chịu uốn, biến dạng cong κ được chuyển thành chuyển vị cưỡng bức trên biên của phần tử đại diện 3D. Kỹ thuật đồng hoá được áp dụng nhằm xác định ma trận vật liệu hữu hiệu trung bình thể tích của phần tử đại diện. Kết cấu nhiều lớp phân bố đứng, phân bố ngang và kết cấu xen kẽ được thực hiện cho mẫu 3D vật liệu tuần hoàn. Kết cấu tấm nhiều lớp và kết cấu tấm có cơ lý biến thiên theo chiều dày tấm được thực hiện cho mẫu 3D tấm chịu uốn. Các kết quả được tương đồng với các nghiên cứu lý thuyết và FE². Qua đó, kích thước của các phần tử đại diện được khảo sát ảnh hưởng của kích thước (size effect) lên các thuộc tính đàn hồi hữu hiệu của vật liệu. Đối với kết cấu tấm nhiều lớp, khi tỉ lệ giữa bề dày mỗi lớp và kích thước của phần tử đại diện giảm dần thì mô đun đàn hồi dọc trục D_{11} và mô đun đàn hồi khối hữu hiệu K_{eff} dần hội tụ. Kết quả của bài toán áp dụng điều kiện biên tuyến tính hội tụ trên xuống và điều kiện biên tuần hoàn hội tụ dưới lên.

Công bố liên quan đến bài toán đa tỉ lệ đàn hồi với phần tử đại diện 3D

Bài báo tạp chí trong nước

1. **P.H. Nguyen**, C.V. Le, & K.T. Nguyen. “Tính toán đồng nhất kết cấu tấm cơ lý biến thiên (FGM) với phần tử đại diện 3D”. *Kết cấu và công nghệ xây dựng*, 1859-3194, 2016.

Bài báo hội nghị trong nước

1. **P.H. Nguyen**, C.V. Le, & K.T. Nguyen. “Tính toán đồng nhất hóa kết cấu tấm cơ lý biến thiên (FGM) với phần tử đại diện 3D”. *Hội nghị những tiến bộ trong xây dựng và kiến trúc*, Tuy Hòa, 22-23/04/2016. (April 2016).
2. **P.H. Nguyen**, C.V. Le, & K.T. Nguyen. “Phương pháp đa tỉ lệ kết cấu tấm với phần tử thể tích đại diện 3D”. *Hội nghị Cơ học kỹ thuật toàn quốc*, Đà Nẵng, 03-05/08/2015. (August 2015).

Khi xem xét các bài toán với phần tử đại diện không gian ba chiều, số lượng biến cũng như tổng số bậc tự do của kết cấu vi mô gia tăng một cách đáng kể. Sự gia tăng này tạo ra một yêu cầu về sự thay đổi cách lập trình nhằm tránh vấn đề quá tải bộ nhớ. Một hướng giải quyết có thể được cân nhắc khi sử dụng phần tử tấm chịu uốn vi mô. Điều này giúp giảm số biến trong tính toán qua việc lấy tích phân trên chiều dày tấm và được rút gọn về mặt trung bình của tấm vi mô. Qua đó, độ chính xác của nghiên cứu vẫn được đảm bảo khi sử dụng phần tử đại diện tấm vi mô chịu uốn mà sẽ được trình bày trong chương tiếp theo.

Chương 5

Bài toán đa tỉ lệ đàn hồi với phần tử tấm vi mô chịu uốn

5.1 Giới thiệu

Thông thường, phương pháp thường được sử dụng trong việc mô hình hoá ứng xử cơ học của tấm composite như là: mô hình phần tử hữu hạn 3D, mô hình phần tử tấm phẳng và mô hình phần tử tấm chịu uốn. Phương pháp mô hình tấm phẳng chịu uốn thu hút nhiều sự quan tâm nhiều hơn vì ưu điểm tiết kiệm chi phí tính toán số. Tuy nhiên, trường hợp hình dạng phức tạp của tấm như là tấm bị khoét lỗ đều phương pháp này gặp khó khăn trong việc mô hình chính xác hình học của tấm. Điều này được giải quyết khi áp dụng cho bài toán phần tử tấm đại diện. Mỗi phần tử tấm đại diện mô tả độ phức tạp của kết cấu vi mô và được lấy trung bình thể tích. Sau đó, bài toán cấp độ vĩ mô được xem xét như kết cấu tấm đồng nhất.

Lý thuyết đồng nhất hoá cho bài toán tấm tuần hoàn trong miền đàn hồi đã được nghiên cứu bởi các tác giả [82–84]. Các phương pháp giải tích sử dụng kỹ thuật xấp xỉ chuỗi được xây dựng cho phần tử đại diện ba chiều nhằm đưa ra ma trận vật liệu hữu hiệu trung bình trên toàn miền thể tích đại diện. Nghiên cứu được mở rộng cho trường hợp tấm nhiều lớp và kết cấu vỏ bởi Lewinski [85]. Các nghiên cứu được trình bày để xác định cận của các thuộc tính hữu hiệu của kết cấu tấm luôn được quan tâm. Nghiên cứu được thực hiện bởi Kolpakov [5, 86] đã xác định được cận cho các thông số đàn hồi hữu hiệu của kết cấu tấm với mối liên hệ bậc nhất. Bên cạnh đó, phương pháp xấp xỉ chuỗi Fast Fourier Transform (FFT) ba chiều được thực hiện bởi Nguyen [87, 15] đã xác định được các hằng số đàn hồi cho kết cấu tấm mỏng. Hướng tiếp cận mô phỏng số FE^2 cho kết cấu vi mô tấm composite ba chiều được thực hiện trong [78, 88]. Tuy nhiên, với sự phức tạp ngày càng phát triển của các bài toán vi mô, việc mô phỏng các kết cấu ba chiều có thể dẫn đến quá tải bộ nhớ trong quá trình mô phỏng. Hướng tiếp cận số được đề xuất

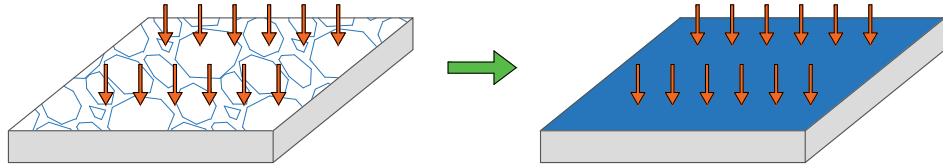
nhằm thay thế mô hình kết cấu tấm không gian ba chiều nhưng vẫn đảm bảo sự chính xác.

Qua đó, chương này sẽ trình bày một hướng tiếp cận số cho kết cấu tấm vi mô chịu uốn không đồng nhất. Kỹ thuật đồng nhất hoá được sử dụng nhằm xác định các hằng số đàn hồi hữu hiệu của kết cấu tấm vi mô không đồng nhất này. Hai ví dụ được thực hiện là kết cấu tấm mỏng khoét lỗ vuông chịu uốn và kết cấu tấm nhiều lớp khoét lỗ tròn chịu uốn. Các kết quả được so sánh với các nghiên cứu lý thuyết khác.

5.2 Phân tử đại diện kết cấu tấm chịu uốn

Chúng ta xem xét một tấm mỏng chịu uốn không đồng nhất với miền diện tích Ω trong mặt phẳng (x, y) với chiều dày t . Nội lực trong tấm bao gồm ten sơ của lực màng \mathbf{N} , ten sơ của mô men uốn \mathbf{M} và ten sơ của lực cắt \mathbf{Q} . Tấm chịu uốn không đồng nhất sẽ được thay thế bằng một kết cấu tấm đồng nhất tương đương mà mỗi điểm vật liệu sẽ có một kết cấu vi mô không đồng nhất.

Kích thước bài toán vi mô L_{micro} nhỏ hơn nhiều lần với kích thước bài toán vĩ mô L_{macro} nên khi tính toán tại cấp độ vi mô thì lực thể tích có thể bỏ qua.



Hình 5.1: Đồng nhất hóa tấm mỏng chịu uốn

Phương trình cân bằng của bài toán cấp độ vi mô

$$\nabla \mathbf{M} = \mathbf{0} \text{ trong } A \quad (5.1)$$

Biến dạng cong vĩ mô κ_M được tính bằng trung bình thể tích của tenơ biến dạng cong vi mô κ_m

$$\kappa_M = \frac{1}{A} \int_A \kappa_m dA \quad (5.2)$$

Với Ω là diện tích của tấm mỏng chịu uốn đại diện.

Tenơ mô men vĩ mô \mathbf{M}_M được tính bằng trung bình thể tích của tenơ moment vi mô \mathbf{M}_m

$$\mathbf{M}_M = \frac{1}{A} \int_A \mathbf{M}_m dA \quad (5.3)$$

Ta có biểu thức sau

$$\nabla \mathbf{X} = \mathbf{I} \quad (5.4)$$

Từ (5.3) và (5.4) ta xây dựng được mối liên hệ sau

$$\nabla (\mathbf{M}_m \mathbf{X}) = (\nabla \mathbf{M}_m) \mathbf{X} + (\nabla \mathbf{X}) \mathbf{M}_m = \mathbf{M}_m \quad (5.5)$$

Thay (5.5) vào định lý trung bình (5.3) ta có được biểu thức sau

$$\mathbf{M}_m = \frac{1}{A} \int_A \nabla (\mathbf{M}_m \mathbf{X}) dA = \frac{1}{A} \int_{\Gamma_m} \mathbf{n} \mathbf{M}_m d\Gamma_m = \frac{1}{A} \sum_i^{n_p} M_i X_i \quad (5.6)$$

Với M_i là mô men trên biên nút i trên biên, X_i là vec tơ toạ độ của nút i trên biên, n_p là tổng số bậc tự do trên biên.

5.3 Điều kiện biên của bài toán tấm vi mô chịu uốn

Trong bài toán vi mô, biến dạng cong tại một điểm vĩ mô κ_m được áp đặt thành điều kiện biên chuyển vị (độ võng và góc xoay) cho bài toán cấp độ kết cấu tấm vi mô.

Trường chuyển vị của bài toán vi mô được xây dựng theo

$$\mathbf{w} = \frac{1}{2} \mathbf{X}^T \kappa_M \mathbf{X} + \tilde{w} \quad (5.7)$$

Áp dụng điều kiện biên tuần hoàn cho bài toán tấm mỏng đại diện tại các nút góc

$$\tilde{w} = 0 \quad (5.8)$$

Độ cong từ bài toán vĩ mô được chuyển thành độ võng tại các nút góc phần tử tấm vi mô được xác định theo biểu thức sau

$$\mathbf{w}(\mathbf{X}) = 0.5 \times \mathbf{X}^T \kappa_M \mathbf{X} = 0.5 \times \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_{11} & \frac{1}{2} \kappa_{12} \\ \frac{1}{2} \kappa_{21} & \kappa_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} \quad (5.9)$$

Và các góc xoay được xác định theo công thức

$$\begin{aligned} \theta_x &= - \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y} \\ \theta_y &= \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} \end{aligned} \quad (5.10)$$

Qua đó, các chuyển vị của nút ở góc được xác định như sau

$$\mathbf{u}_i = \begin{Bmatrix} w^i \\ \theta_x^i \\ \theta_y^i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}X_1^2 & \frac{1}{2}X_2^2 & \frac{1}{2}X_1X_2 \\ 0 & -X_2 & -\frac{1}{2}X_1 \\ X_1 & 0 & \frac{1}{2}X_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_{11} \\ \kappa_{22} \\ \kappa_{12} \end{Bmatrix} = \mathbf{T}_p^i \kappa_M \quad (5.11)$$

Điều kiện biên tuần hoàn trong bài toán tấm vi mô chịu uốn thể hiện mối liên hệ giữa chuyển vị của các nút độc lập, các nút đối xứng phụ thuộc trên biên và chuyển vị tại góc tấm.

$$\begin{aligned} X_c \times w_{\text{trên}} - X_c \times w_{\text{dưới}} + X_p \times w_4 - X_p \times w_1 &= 0 \\ Y_c \times w_{\text{phải}} - Y_c \times w_{\text{trái}} + Y_p \times w_2 - Y_p \times w_1 &= 0 \end{aligned} \quad (5.12)$$

Với X_c là tọa độ tại các nút góc, X_p và u_p là tọa độ và độ võng tại các nút trên biên tuần hoàn. Trường chuyển vị được rời rạc hoá thành các phần tử tam giác HCT (9 bậc tự do) được thể hiện như sau

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{d} \quad (5.13)$$

Trường biến dạng của bài toán tấm được xác định qua công thức

$$\kappa = \mathbf{B}\mathbf{d} \quad (5.14)$$

Ma trận độ cứng của phần tử tấm vi mô được xây dựng

$$\mathbf{K} = \int_A \mathbf{B}^T \mathbf{D}_b \mathbf{B} dA \quad (5.15)$$

Phương trình hệ thống của bài toán tấm vi mô chịu uốn như sau

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (5.16)$$

Trường hợp bài toán tấm mỏng, $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{w} & \theta_x & \theta_y \end{bmatrix}^T$ là trường chuyển vị của tấm vi mô.

$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} & \mathbf{M}_x & \mathbf{M}_y \end{bmatrix}^T$ là tải trọng của tấm vi mô.

Điều kiện biên tuần hoàn cho bài toán tấm vi mô chịu uốn được thể hiện theo bậc tự do

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}_i & \mathbf{C}_d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{u}_d \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (5.17)$$

Mối liên hệ giữa các bậc tự do độc lập và các bậc tự do phụ thuộc được thể hiện qua biểu thức

$$\mathbf{u}_d = -\mathbf{C}_d^{-1}\mathbf{C}_i\mathbf{u}_i = \mathbf{C}_{di}\mathbf{u}_i \quad (5.18)$$

Phương trình hệ thống được xếp lại theo các bậc tự do độc lập và phụ thuộc

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{K}_{id} \\ \mathbf{K}_{di} & \mathbf{K}_{dd} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{u}_d \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_i \\ \mathbf{f}_d \end{Bmatrix} \quad (5.19)$$

Áp đặt điều kiện biên tuần hoàn vào phương trình hệ thống

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^* &= \mathbf{K}_{ii} + \mathbf{K}_{id}\mathbf{C}_{di} + \mathbf{C}_{di}^T\mathbf{K}_{di} + \mathbf{C}_{di}^T\mathbf{K}_{dd}\mathbf{C}_{di} \\ \mathbf{f}^* &= \mathbf{f}_i + \mathbf{C}_{di}^T\mathbf{f}_d \\ \mathbf{K}^*\mathbf{u}_i &= \mathbf{f}^* \end{aligned} \quad (5.20)$$

5.4 Kỹ thuật đồng nhất hoá kết cấu tấm vi mô chịu uốn

Mô men của bài toán tấm vĩ mô chịu uốn được xác định như sau

$$\mathbf{M}_M = \mathbf{D}_M\kappa_M \quad (5.21)$$

Chuyển vị tại 4 nút góc tấm vi mô được xác định như sau

$$\mathbf{u}_b = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_p^1 & \mathbf{T}_p^2 & \mathbf{T}_p^3 & \mathbf{T}_p^4 \end{bmatrix}^T \kappa_M = \mathbf{T}_p\kappa_M \quad (5.22)$$

Phương trình hệ thống (5.16) được viết lại theo các bậc tự do tại góc phần tử

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{aa} & \mathbf{K}_{ab} \\ \mathbf{K}_{ba} & \mathbf{K}_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_a \\ \mathbf{u}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_b \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

Trong đó, \mathbf{u}_a là chuyển vị tại những nút không nằm ở góc RPE và \mathbf{u}_b là chuyển vị tại những nút nằm tại góc tấm RPE. Sử dụng phương pháp nén bậc tự do để đưa về theo các bậc tự do ở góc tấm

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{bb}^* &= \mathbf{K}_{bb} - \mathbf{K}_{ba}\mathbf{K}_{aa}^{-1}\mathbf{K}_{ab} \\ \mathbf{K}_{bb}^*\mathbf{u}_b &= \mathbf{f}_b \end{aligned} \quad (5.24)$$

Ứng suất của cấp độ vĩ mô được tính theo công thức (5.6) và (5.24)

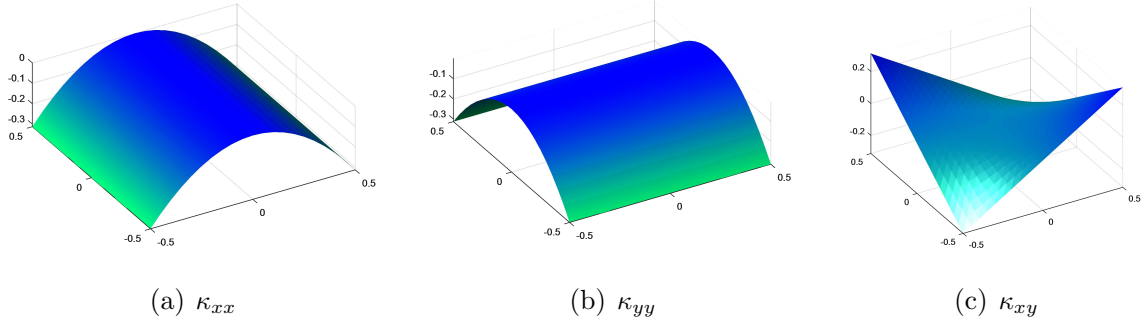
$$\mathbf{M}_M = \frac{1}{A}\mathbf{T}_p^T\mathbf{f}_b = \frac{1}{A}\mathbf{T}_p^T\mathbf{K}_{bb}^*\mathbf{u}_b = \frac{1}{A}\mathbf{T}_p^T\mathbf{K}_{bb}^*\mathbf{T}_p\kappa_M \quad (5.25)$$

Đồng nhất công thức (5.25) và công thức (5.21) ta được ma trận hằng số vật liệu hữu hiệu của tấm vi mô RPE

$$\mathbf{D}_{eff} = \frac{1}{A}\mathbf{T}_p^T\mathbf{K}_{bb}^*\mathbf{T}_p \quad (5.26)$$

5.5 Các dạng chuyển vị của tấm vi mô chịu uốn

Đối với bài toán tấm, các trường hợp chuyển vị cơ bản ứng với các biến dạng cong từ cấp độ vĩ mô được thể hiện như sau



Hình 5.2: Chuyển vị của phần tử tấm đại diện tương ứng với biến dạng cong từ cấp độ vĩ mô.

Hằng số vật liệu mô đun đàn hồi khối hữu hiệu K_{eff} và mô đun kháng trượt hữu hiệu G_{eff} được xác định trực tiếp thông qua biểu thức sau

$$\begin{aligned} K_{eff} &= \frac{6}{t^3}(D_{11} + D_{12}) \\ G_{eff} &= \frac{12}{t^3}D_{33} \end{aligned} \quad (5.27)$$

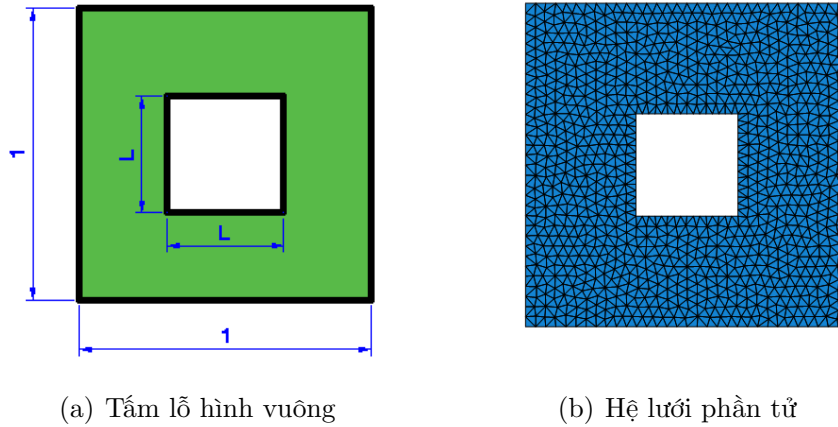
Hằng số vật liệu mô đun đàn hồi E_{eff} và hệ số nở hông ν_{eff} thông qua ma trận nghịch đảo

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{eff} &= \mathbf{D}_{eff}^{-1} \\ E_1 &= \frac{C_{12}}{C_{11} \times t^3} \\ E_2 &= \frac{C_{12}}{C_{22} \times t^3} \\ \nu_{12} &= \frac{-C_{12}}{C_{11}} \\ \nu_{21} &= \frac{-C_{12}}{C_{22}} \end{aligned} \quad (5.28)$$

5.6 Ví dụ số tấm mỏng vi mô chịu uốn

5.6.1 Tấm có lỗ hình vuông

Tấm đại diện vi mô (RPE) hình vuông bề dày $t = 0.1mm$ có kích thước $1mm \times 1mm$ bị khoét lỗ $L \times L$ được khảo sát với sự thay đổi kích thước lỗ rỗng V_f từ 10% đến 40% như hình 5.3. Bài toán được rời rạc hoá thành các phần tử tấm HCT hình tam giác.



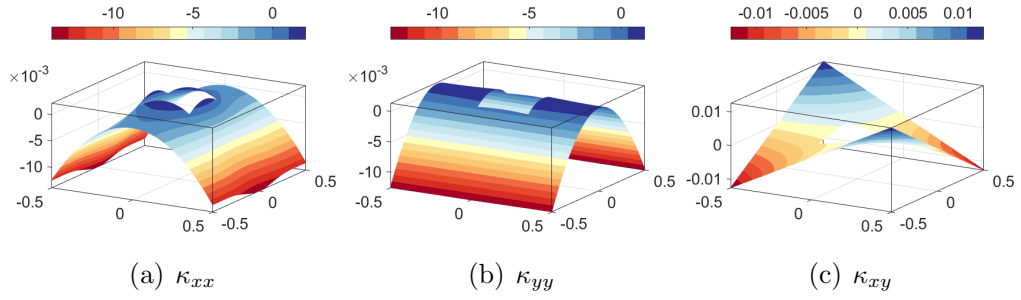
Hình 5.3: Bài toán tấm vi mô chịu uốn khoét lỗ hình vuông và hệ lưới phần tử.

Ma trận vật liệu được chuẩn hoá với mô đun đàn hồi $E=10920$ (MPa) và hệ số nở hông $\nu = 0.3$.

$$\mathbf{D}_0 = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.3 & 0.0 \\ 0.3 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.35 \end{bmatrix}$$

Kết quả trường chuyển vị tương ứng với biến dạng cong từ cấp độ vĩ mô trong trường hợp tấm vi mô có lỗ hình vuông được thể hiện trong hình 5.4. Với các nút trên biên, chuyển vị tương đồng như tấm không có lỗ. Tuy nhiên, với các nút dọc theo biên lỗ có biểu hiện độ võng lên. Điều này có thể dẫn đến sự tập trung cục bộ tại mép lỗ và có nguy cơ dẫn đến phá hoại.

Qua hình 5.6, sự thay đổi của mô đun đàn hồi khối hữu hiệu K_{eff} và mô đun kháng trượt hữu hiệu G_{eff} thay đổi phi tuyến khi thể tích lỗ rỗng tăng dần. Trường hợp mô đun kháng trượt G thấp hơn khi so với nghiên cứu tuyến tính của Voigt [1].



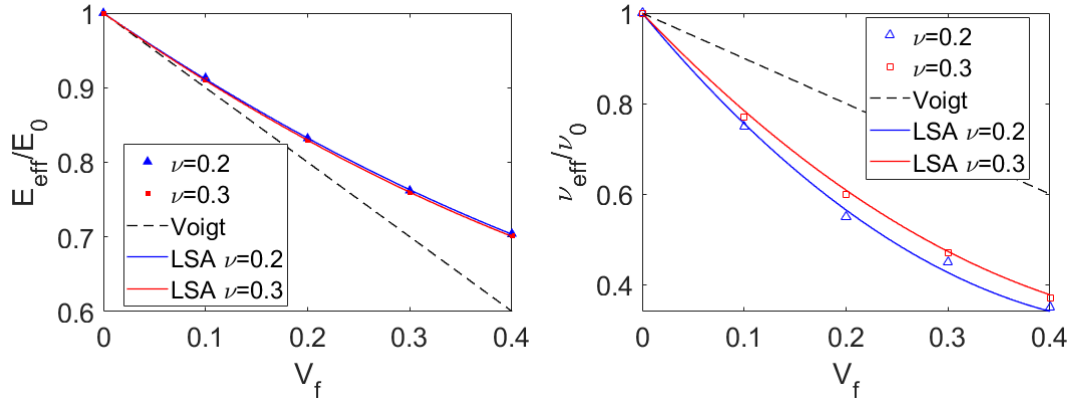
Hình 5.4: Chuyển vị của tấm vi mô RPE lỗ hình vuông với biến dạng vĩ mô.

Bảng 5.1: Hằng số vật liệu hữu hiệu của RPE khi thể tích lỗ thay đổi.

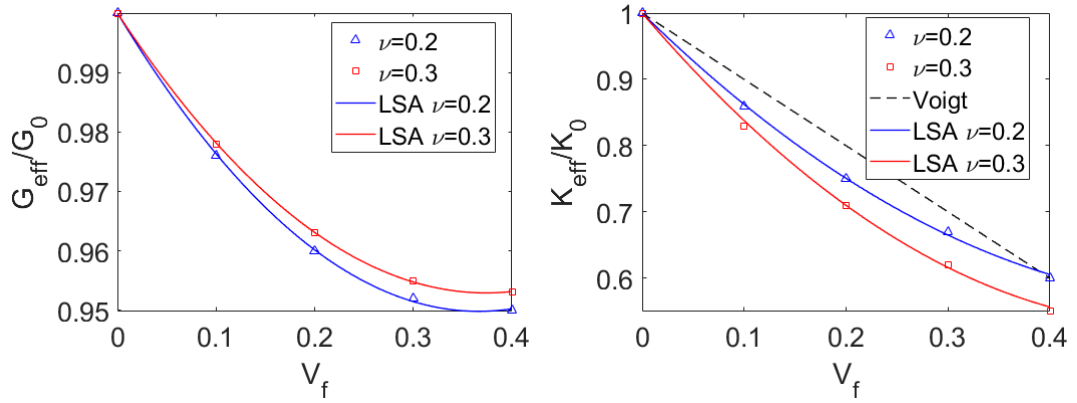
V_f	0	0.1	0.2	0.3	0.4	
$\nu_0=0.2$	E_{eff}	10920	9974.40	9088.39	8326.03	7688.61
	ν_{eff}	0.20	0.15	0.11	0.09	0.07
	K_{eff}	6825	5863.96	5123.25	4558.73	4121.70
	G_{eff}	4550	4439.58	4368.28	4333.15	4324.52
$\nu_0=0.3$	E_{eff}	10920	9946.09	9047.67	8286.07	7656.07
	ν_{eff}	0.30	0.23	0.18	0.14	0.11
	K_{eff}	7800	6489.89	5534.43	4836.78	4313.84
	G_{eff}	4200	4107.62	4044.94	4012.63	4003.50

Bảng 5.2: Phương trình hằng số vật liệu hữu hiệu của tấm lỗ chữ nhật.

Phương pháp	Mô đun đàn hồi hữu hiệu
E_{eff}	Hàm xấp xỉ ($\nu = 0.3$) $E_{eff} = E_0 \times (0.5194 \times V_f^2 - 0.9565 \times V_f + 1)$
	Hàm xấp xỉ ($\nu = 0.2$) $E_{eff} = E_0 \times (0.4823 \times V_f^2 - 0.9344 \times V_f + 1)$
	G. Lu và cộng sự [89] $E_{eff} = E_0 \times (1 - 2 \times V_f) \times (1 + 4 \times V_f^2)$
	Robert và cộng sự [90] $E_{eff} = E_0 \times (1 - \frac{V_f}{0.798})^{2.25}$
ν_{eff}	Hàm xấp xỉ ($\nu = 0.3$) $\nu_{eff} = \nu_0 \times (2.0016 \times V_f^2 - 2.3569 \times V_f + 1)$
	Hàm xấp xỉ ($\nu = 0.2$) $\nu_{eff} = \nu_0 \times (2.6419 \times V_f^2 - 2.7046 \times V_f + 1)$
	Robert và cộng sự [90] $\nu_{eff} = 0.14 + (1 - \frac{V_f}{0.472}) \times (\nu_0 - 0.14)$
K_{eff}	Hàm xấp xỉ ($\nu = 0.3$) $K_{eff} = K_0 \times (1.7097 \times V_f^2 - 1.7925 \times V_f + 1)$
	Hàm xấp xỉ ($\nu = 0.2$) $K_{eff} = K_0 \times (1.3016 \times V_f^2 - 1.5069 \times V_f + 1)$
G_{eff}	Hàm xấp xỉ ($\nu = 0.3$) $G_{eff} = G_0 \times (0.3371 \times V_f^2 - 0.2520 \times V_f + 1)$
	Hàm xấp xỉ ($\nu = 0.2$) $G_{eff} = G_0 \times (0.3742 \times V_f^2 - 0.2741 \times V_f + 1)$



Hình 5.5: Ảnh hưởng lỗ rỗng đến mô đun E_{eff} và ν_{eff} của vật liệu khoét lỗ.



(a) Mô đun đàn hồi trượt hữu hiệu

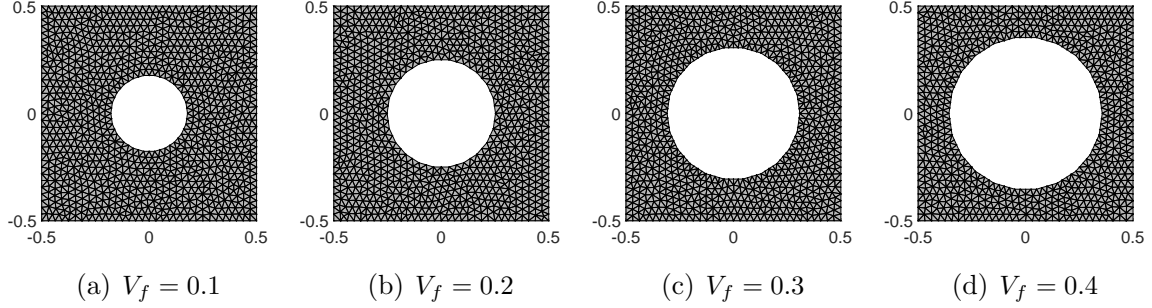
(b) Mô đun đàn hồi khối hữu hiệu

Hình 5.6: Ảnh hưởng lỗ rỗng đến mô đun K_{eff} và G_{eff} của vật liệu khoét lỗ.

5.6.2 Tấm có nhiều lớp có lỗ tròn

Tấm đại diện vi mô (RPE) hình vuông bề dày $t = 0.1mm$ có kích thước $L_1 \times L_2 = 1mm \times 1mm$ bị khoét lỗ tròn có bán kính $R = \sqrt{\frac{V_f \times L_1 \times L_2}{\pi}}$ được khảo sát với sự thay đổi kích thước lỗ rỗng V_f từ 10% đến 40% như hình 5.7. Bài toán được rời rạc hoá thành các phần tử tam giác HCT. Trường hợp thể tích lỗ rỗng $V_f = 0.1$, tấm phần tử đại diện được chia thành 1106 phần tử tam giác và 1947 bậc tự do. Trường hợp thể tích lỗ rỗng $V_f = 0.2$, tấm phần tử đại diện được chia thành 752 phần tử tam giác và 1296 bậc tự do. Trường hợp thể tích lỗ rỗng $V_f = 0.3$, tấm phần tử đại diện được chia thành 848 phần tử tam giác và 1572 bậc tự do. Trường hợp thể tích lỗ rỗng $V_f = 0.4$, tấm phần tử đại diện được chia thành 904 phần tử tam giác và 1668 bậc tự do.

Tấm composite cốt sợi gia cường một phương được xem là vật liệu trục hướng với x_1 là trục song song với hướng sợi gia cường, x_2 là trục vuông góc với x_1 và x_3 là trục vuông góc với mặt phẳng tấm.



Hình 5.7: Lưới phần tử của phần tử tấm đại diện với thể tích lỗ thay đổi.

Áp dụng cho bài toán ứng suất phẳng trong hệ trục tọa độ vật liệu, ma trận hằng số vật liệu hữu hiệu \mathbf{Q}_{ij} của vật liệu trục hướng được thể hiện như sau

$$\mathbf{Q}_{ij} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

Các hệ số trong ma trận vật liệu hữu hiệu của lớp thứ k của tấm được xác định theo công thức

$$Q_{11}^k = \frac{E_1^k}{1 - \nu_{12}^k \times \nu_{21}^k} \quad (5.30)$$

$$Q_{12}^k = \frac{\nu_{12}^k \times E_2^k}{1 - \nu_{12}^k \times \nu_{21}^k} = \frac{\nu_{21}^k \times E_1^k}{1 - \nu_{12}^k \times \nu_{21}^k} \quad (5.31)$$

$$Q_{22}^k = \frac{E_2^k}{1 - \nu_{12}^k \times \nu_{21}^k} \quad (5.32)$$

$$Q_{66}^k = G_{12}^k \quad (5.33)$$

Vật liệu composite được tạo thành từ nhiều lớp liên tiếp, trong đó phương cốt sợi của mỗi lớp khác nhau. Do đó, tọa độ tổng thể được chọn làm hệ quy chiếu cho các lớp vật liệu. Ma trận vật liệu của từng lớp sẽ được xoay trục để chuyển về cùng hệ quy chiếu như sau

$$\bar{\mathbf{Q}}_{ij} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ Q_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

Với các ma trận hằng số vật liệu hữu hiệu sau khi xoay trục góc α được xác định theo công thức sau

$$\begin{aligned}
\bar{Q}_{11} &= Q_{11} \times \cos^4 \alpha + 2 \times (Q_{12} + 2 \times Q_{66}) \times \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + Q_{22} \times \sin^4 \alpha \\
\bar{Q}_{21} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4 \times Q_{66}) \times \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + Q_{12} \times (\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha) \\
\bar{Q}_{22} &= Q_{11} \times \sin^4 \alpha + 2 \times (Q_{12} + 2 \times Q_{66}) \times \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + Q_{22} \times \cos^4 \alpha \\
\bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2 \times Q_{66}) \times \sin \alpha \cos^3 \alpha + (Q_{11} - Q_{12} + 2 \times Q_{66}) \times \sin^3 \alpha \cos \alpha \\
\bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2 \times Q_{66}) \times \sin^3 \alpha \cos \alpha + (Q_{11} - Q_{12} + 2 \times Q_{66}) \times \sin \alpha \cos^3 \alpha \\
\bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \times \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + Q_{66} \times (\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha)
\end{aligned} \tag{5.35}$$

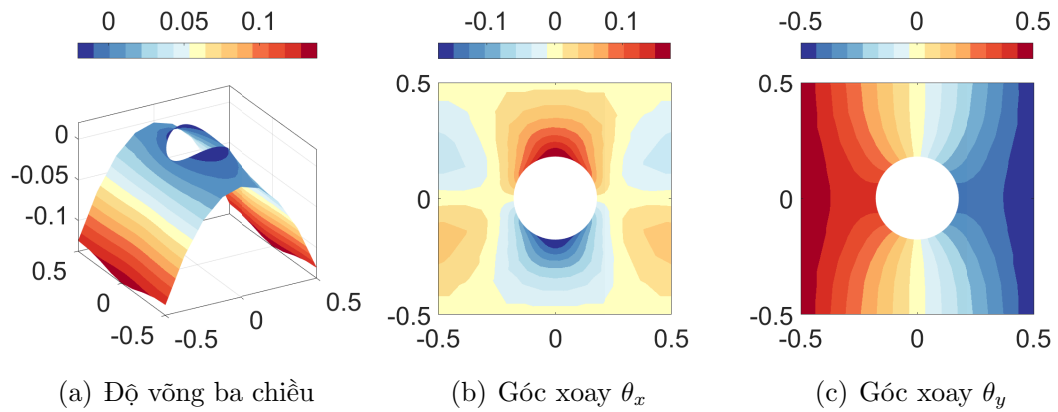
Với góc α là góc nghiêng giữa hướng sợi và trục x tổng thể.

Ma trận vật liệu hữu hiệu tổng theo bề dày tấm được xác định theo công thức

$$\mathbf{D}_b = \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{\mathbf{Q}}^k z^2 dz = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (z_{k+1}^3 - z_k^3) \bar{\mathbf{Q}}^k \tag{5.36}$$

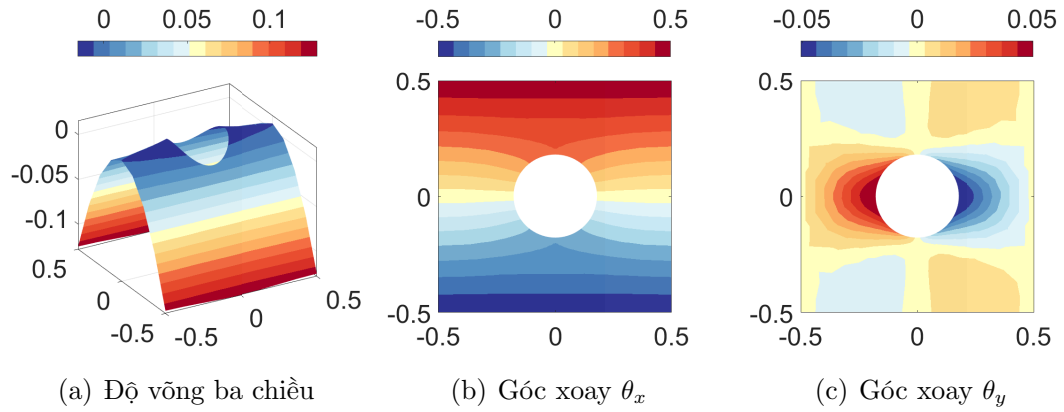
Ma trận vật liệu được chuẩn hoá với các thông số đàn hồi như sau $E_2 = 1$; $E_1 = 25E_2$; $G_{12} = 0.5 \times E_2$; $\nu_{12} = 0.25$. Với ma trận độ cứng uốn của mỗi lớp với góc 0 và 90 được xác định như sau

$$\mathbf{D}_0 = \begin{bmatrix} 25.06 & 0.25 & 0.00 \\ 0.25 & 1.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.50 \end{bmatrix}; \mathbf{D}_{90} = \begin{bmatrix} 1.00 & 0.25 & 0.00 \\ 0.25 & 25.06 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.50 \end{bmatrix} \tag{5.37}$$

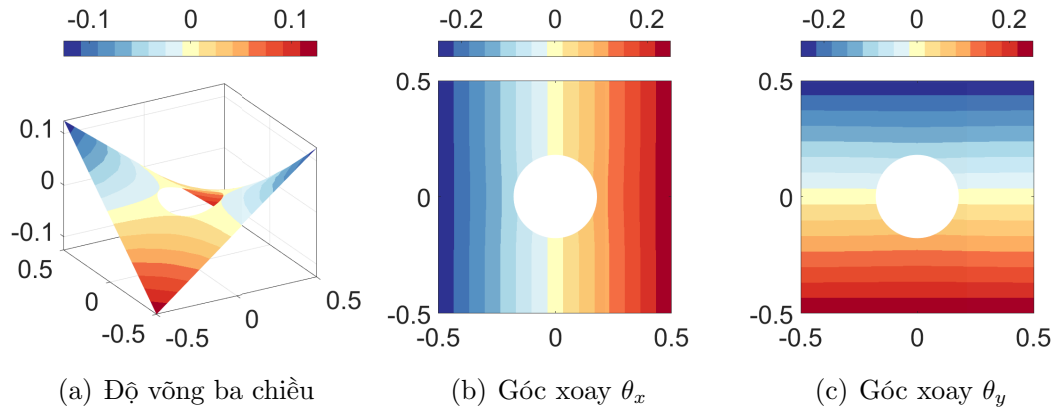


Hình 5.8: Chuyển vị tấm vi mô với biến dạng κ_{xx} và $V_f = 0.1$.

Tấm vi mô hình vuông cạnh a với liên kết tựa theo chu vi tấm chịu tải trọng đều q được thể hiện trong Hình 5.11. Thông số vật liệu của tấm ba lớp $(0/90/0)$,



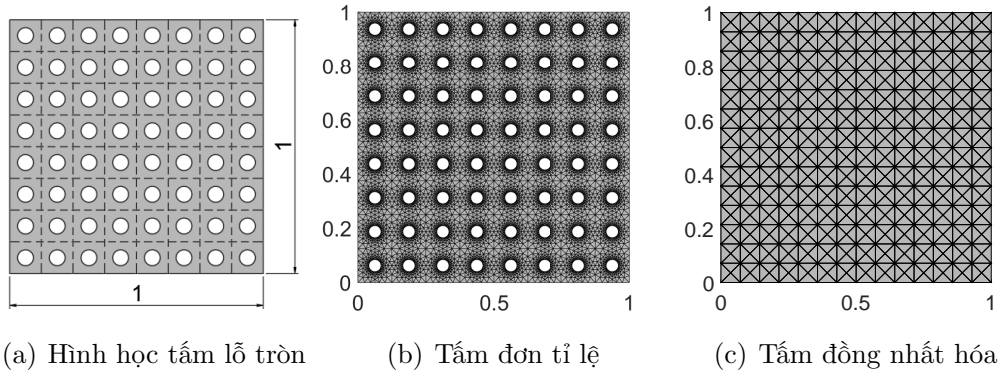
Hình 5.9: Chuyển vị của tấm vi mô với biến dạng κ_{yy} và $V_f = 0.1$.



Hình 5.10: Chuyển vị của tấm vi mô với biến dạng κ_{xy} và $V_f = 0.1$.

tấm 4 lớp (0/90/90/0) và tấm 5 lớp (0/90/0/90/0) được xem xét với tỷ lệ thể tích lỗ rỗng tăng dần $V_f = 0.1 : 0.4$. Hình 5.8, biến dạng cong κ_{yy} được thể hiện trong hình 5.9 và biến dạng cong κ_{xy} được thể hiện trong hình 5.10. Độ võng được khảo sát tại tâm tấm vi mô $\bar{w}(a/2; a/2; 0)$ với giá trị không thứ nguyên $\bar{w} = \frac{100E_2wt^3}{qa^4}$ được thể hiện trong bảng 5.3.

Độ võng của tấm biên tựa chu vi chịu tải trọng đều có xu hướng tăng dần khi thể tích lỗ rỗng tăng dần là hợp lý. Trường hợp nguyên tấm ($V_f = 0$), kết quả đạt được hội tụ dần về nghiệm giải tích được cung cấp bởi Reddy [91] (chênh lệch 0.96 % với tấm ba lớp (0/90/0), 1.09 % với tấm bốn lớp (0/90/90/0) và 1.05 % với tấm năm lớp (0/90/0/90/0) khi so sánh với kết quả số lưới 16×16). Bảng so sánh với các nghiên cứu số khác được thể hiện trong Bảng 5.4. Độ hội số được thể hiện trong hình 5.12 thông qua độ võng tại tâm tấm nguyên trong cả ba trường hợp (tấm ba



Hình 5.11: Lưới phần tử tam giác với thể tích lỗ thay đổi $V_f = 0.1 : 0.4$.

Bảng 5.3: Độ võng không thứ nguyên của tấm vĩ mô với biên tựa chu vi.

Lưới phần tử	4×4	6×6	8×8	10×10	12×12	14×14	16×16
Số bậc tự do	75	183	339	543	795	1095	1443
[0/90/0]							
$V_f = 0$	0.5910	0.6397	0.6531	0.6583	0.6608	0.6623	0.6632
$V_f = 0.1$	0.7090	0.7680	0.7847	0.7912	0.7945	0.7964	0.7976
$V_f = 0.2$	0.7951	0.8617	0.8807	0.8883	0.8921	0.8943	0.8956
$V_f = 0.3$	0.8662	0.9390	0.9598	0.9681	0.9723	0.9747	0.9762
$V_f = 0.4$	0.9299	1.0079	1.0303	1.0392	1.0437	1.0463	1.0479
[0/90/90/0]							
$V_f = 0$	0.5917	0.6457	0.6621	0.6690	0.6725	0.6746	0.6758
$V_f = 0.1$	0.7041	0.7695	0.7894	0.7978	0.8020	0.8045	0.8061
$V_f = 0.2$	0.7899	0.8638	0.8864	0.8959	0.9008	0.9036	0.9053
$V_f = 0.3$	0.8579	0.9384	0.9630	0.9733	0.9786	0.9816	0.9835
$V_f = 0.4$	0.9148	1.0004	1.0266	1.0376	1.0432	1.0464	1.0485
[0/90/0/90/0]							
$V_f = 0$	0.5904	0.6477	0.6654	0.6728	0.6766	0.6788	0.6802
$V_f = 0.1$	0.7002	0.7693	0.7905	0.7994	0.8040	0.8067	0.8083
$V_f = 0.2$	0.7857	0.8638	0.8878	0.8979	0.9031	0.9061	0.9080
$V_f = 0.3$	0.8519	0.9366	0.9627	0.9737	0.9793	0.9826	0.9846
$V_f = 0.4$	0.9051	0.9949	1.0224	1.0341	1.0401	1.0435	1.0457

lớp, tấm bốn lớp và tấm năm lớp) khi được so sánh với kết quả Reddy [91]. Độ dốc giảm dần và dần chuyển về đường nằm ngang thể hiện độ hội tụ của phương pháp khi sử dụng phần tử tấm HCT.

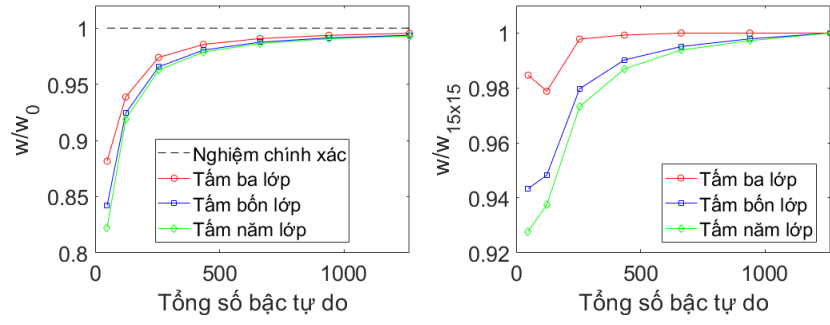
Bảng 5.4: Độ võng không thứ nguyên tại tâm tấm với điều kiện biên tựa.

Phương pháp	Tấm ba lớp [0/90/0]	Tấm bốn lớp [0/90/90/0]	Tấm năm lớp [0/90/0/90/0]
HCT (CLT)	0.6632	0.6758	0.6802
Reddy (CLT) [91]	0.6697	0.6833	0.6874
DSG3 (HSDT) [92]	0.6642	0.6744	0.6688
CS-DSG3 (HSDT) [92]	0.6743	0.6854	0.6799

Bảng 5.5: Độ võng chuẩn hóa tại tâm tấm lỗ tròn tuần hoàn theo hai phương pháp.

Điều kiện biên	V_f	Phương pháp	Bậc tự do	Ba lớp	Bốn lớp	Năm lớp
Biên tựa	0.1	Tấm đơn tỉ lệ	31491	0.7949	0.8051	0.8080
		Tấm đồng nhất	1263	0.7971	0.8054	0.8076
	0.2	Tấm đơn tỉ lệ	15255	0.8850	0.8941	0.8959
		Tấm đồng nhất	1263	0.8950	0.9045	0.9071
	0.3	Tấm đơn tỉ lệ	23043	0.9648	0.9726	0.9737
		Tấm đồng nhất	1263	0.9756	0.9827	0.9837
	0.4	Tấm đơn tỉ lệ	20136	1.0275	1.0292	1.0267
		Tấm đồng nhất	1263	1.0472	1.0476	1.0447
Biên ngàm	0.1	Tấm đơn tỉ lệ	31491	0.1616	0.1656	0.1666
		Tấm đồng nhất	1263	0.1639	0.1674	0.1681
	0.2	Tấm đơn tỉ lệ	15255	0.1800	0.1824	0.1821
		Tấm đồng nhất	1263	0.1842	0.1867	0.1865
	0.3	Tấm đơn tỉ lệ	23043	0.1965	0.1980	0.1971
		Tấm đồng nhất	1263	0.2011	0.2028	0.2019
	0.4	Tấm đơn tỉ lệ	20136	0.2097	0.2104	0.2093
		Tấm đồng nhất	1263	0.2165	0.2170	0.2157

Bảng 5.5 thể hiện sự tương đồng về độ võng được chuẩn hóa tại tâm tấm của hai hướng tiếp cận, phân tích tấm nhiều lớp đơn tỉ lệ và phân tích tấm nhiều lớp với kỹ thuật đồng nhất hóa. Với kỹ thuật đồng nhất hóa, số bậc tự do của bài toán đã được giảm một cách đáng kể khi so sánh với hướng tiếp cận phân tích đơn tỉ lệ, gần 30 lần với thể tích lỗ rỗng $V_f = 0.1$ trong bài toán biên tựa chu vi tấm. Trường chuyển vị, độ võng w , góc xoay θ_x và θ_y , của bài toán tấm ba lớp khi phân tích đơn

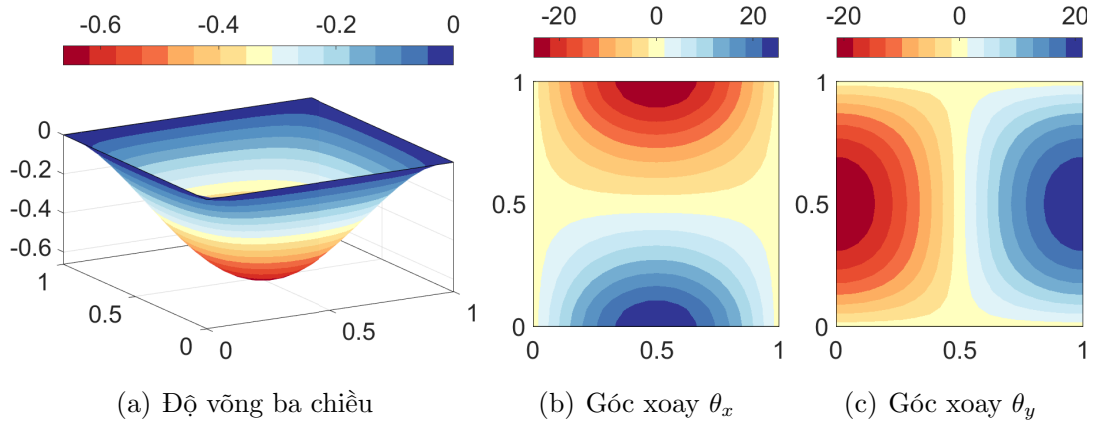


(a) Biên tựa theo chu vi

(b) Biên ngàm theo chu vi

Hình 5.12: Độ võng tại giữa tấm trong hai điều kiện biên với tấm nguyên.

tỉ lệ được thể hiện trong Hình 5.14 tương đồng với khi sử dụng kỹ thuật đồng nhất hóa trong Hình 5.13.

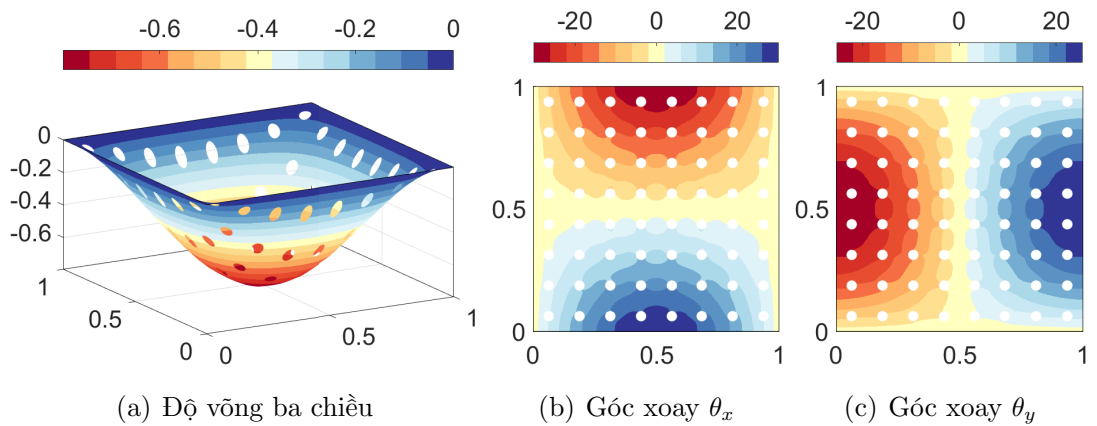


(a) Độ võng ba chiều

(b) Góc xoay θ_x

(c) Góc xoay θ_y

Hình 5.13: Trường chuyển vị tấm ba lớp đồng nhất hóa biên tựa với $V_f = 0.1$.



(a) Độ võng ba chiều

(b) Góc xoay θ_x

(c) Góc xoay θ_y

Hình 5.14: Trường chuyển vị tấm ba lớp đơn tỉ lệ biên tựa với $V_f = 0.1$.

5.7 Kết luận tấm mỏng vi mô chịu uốn trong miền đàn hồi

Trong chương này, phương pháp đa tỉ lệ tính toán đồng nhất tấm mỏng chịu uốn sử dụng phần tử tấm HCT (Heish-Clough-Tocher) đã được trình bày với phần tử tấm vi mô chịu uốn đại diện (RPE). Bài toán tấm có lỗ hình vuông và tấm nhiều lớp lỗ tròn được khảo sát. Các hằng số đàn hồi hữu hiệu như mô đun đàn hồi hữu hiệu E_{eff} , hệ số nở hông hữu hiệu ν_{eff} , mô đun đàn hồi khối hữu hiệu K_{eff} và mô đun kháng cắt hữu hiệu G_{eff} được khảo sát sự thay đổi khi xem xét trường hợp tăng dần thể tích lỗ rỗng từ 10% đến 40%. Sau đó, hàm xấp xỉ các hằng số vật liệu hữu hiệu theo thể tích lỗ rỗng được xây dựng bằng phương pháp bình phương cực tiểu. Phương trình này thể hiện các thông số vật liệu giảm dần khi tăng dần thể tích lỗ rỗng.

Công bố liên quan đến bài toán tấm mỏng vi mô chịu uốn trong miền đàn hồi:
Bài báo hội nghị trong nước

1. **P.H. Nguyen**, C.V. Le, & K.T. Nguyen. "Kỹ thuật đồng nhất hoá kết cấu tấm chịu uốn". *In proceedings of Hội nghị Cơ Học Kỹ Thuật Toàn Quốc 2019*, Hà Nội, 9/4/2019. (April 2019).

Bài báo hội nghị quốc tế

1. **P.H. Nguyen**, C.V. Le, & Phuc, H. L. H. (2020, July). "Homogenization approach for representative laminate plate using Hsieh-Clough-Tocher element". *In THE 11TH INTERNATIONAL CONFERENCE ON COMPUTATIONAL METHODS (ICCM2020)*.

Chương tiếp theo sẽ xem xét cho bài toán đa tỉ lệ ngoài miền đàn hồi. Bài toán phân tích giới hạn cho kết cấu vi mô được xây dựng kết hợp với lý thuyết đồng nhất hóa. Kết quả của bài toán phân tích giới hạn cho kết cấu vi mô là ứng suất giới hạn của phần tử đại diện và sự phân bố năng lượng tiêu tán dẻo tại trạng thái giới hạn nhằm giúp dự đoán cơ cấu phá hoại. Tập hợp các trường hợp ứng suất giới hạn này sẽ giúp chúng ta xác định trực tiếp hàm dẻo hữu hiệu của vật liệu. Qua đó, hàm dẻo hữu hiệu này có thể được sử dụng cho bài toán phân tích giới hạn của cấp độ vĩ mô.

Chương 6

Miền cường độ hữu hiệu cho vật liệu theo tiêu chuẩn Hill

6.1 Giới thiệu

Vật liệu hỗn hợp và vật liệu không đồng nhất được sử dụng rộng rãi trong các cấu kiện trong ngành dân dụng và cơ học kỹ thuật, và việc ước lượng các thuộc tính hữu hiệu đóng một vai trò quan trọng trong thiết kế và thẩm tra dưới tác dụng của tải trọng. Kỹ thuật tính toán tải trọng sụp đổ của một kết cấu có thể được thực hiện bằng phương pháp phân tích lặp từng bước. Tuy nhiên, kỹ thuật xác định cường độ giới hạn của hướng tiếp cận phân tích giới hạn đã được chứng minh hiệu quả hơn trong các nghiên cứu [39, 93] khi bỏ qua quá trình chuyển tiếp từ đàn hồi sang trạng thái chảy dẻo mà chỉ xác định trạng thái cuối cùng.

Nhằm đánh giá một cách chính xác sự ảnh hưởng của tính không đồng nhất, phân tích giới hạn cho cấu trúc vi mô, được xây dựng dựa trên nguyên lý cận trên hoặc cận dưới, đã được hình thành và phát triển ngày càng mạnh mẽ trong những thập niên gần đây. Lý thuyết đồng nhất hóa trong phân tích giới hạn được giới thiệu để xác định tiêu chuẩn cường độ vi mô cho vật liệu hỗn hợp gia cường cốt sợi trong [94–96]. Phân tích giới hạn kết hợp đồng nhất hóa được trình bày dựa trên phần tử hữu hạn và phương trình tuyến tính được đề xuất trong [97] để tính toán cường độ vật liệu vi mô theo tiêu chuẩn Tresca. Ứng xử của hình lăng trụ có lỗ rỗng được nghiên cứu trong [98, 99] với tiêu chuẩn Gurson với xấp xỉ trường động học và tĩnh học cũng như lý thuyết đồng nhất hóa. Dựa vào phần tử hữu hạn và thuật toán đối ngẫu điểm nội, một đề xuất nhằm xác định cường độ của cấp độ vi mô và phân tích ổn định của đất được gia cường bởi cọc đá được trình bày trong [100–102, 54, 103]. Trường hợp xem xét tấm tuần hoàn, một hướng tiếp cận đồng nhất hóa miền cường độ tấm cổ điển Kirchhoff của tấm nhiều lớp cứng dẻo lý tưởng được trình bày [104, 105], và cường độ của tấm chịu uốn trong [106, 107].

Sự kết hợp kỹ thuật đồng nhất hóa, phân tích động học và phương trình phi tuyến nhằm xác định được tải trọng và cơ cấu phá hoại của vật liệu hỗn hợp composite tuần hoàn theo tiêu chuẩn chảy dẻo hình elip bởi Li và các cộng sự [47–50]. Hướng tiếp cận trực tiếp của phân tích giới hạn của kết cấu và vật liệu dẫn đến một bài toán tối ưu hóa được ràng buộc tuyến tính và phi tuyến. Vì vậy sự phát triển của các kỹ thuật tối ưu hóa để tìm nghiệm được thực hiện trong rất nhiều nghiên cứu. Từ một góc nhìn toán học, chương trình tuyến tính luôn tạo được sự hấp dẫn, và được áp dụng trong các bài toán phân tích giới hạn [108–110]. Mặc dù một phần mềm mạnh mẽ được xây dựng trên thuật toán đối ngẫu điểm nội hiện có trong việc xác định nghiệm tối ưu hóa, một số lượng lớn ràng buộc được tạo ra trong quá trình tuyến tính hóa cần được thực hiện để cung cấp nghiệm chính xác, do đó chi phí tính toán gia tăng. Phương án thay thế khác được thực hiện gần đây để giải các bài toán tối ưu hóa với các ràng buộc dạng nón với thuật giải tối ưu hóa đối ngẫu điểm nội [111–116]. Bài toán phân tích giới hạn ngày được chú ý hơn. Sự thật, tiêu chuẩn dẻo được sử dụng thông dụng được thể hiện dưới dạng nón hoặc ràng buộc bán xác định, và bài toán tối ưu hóa được chuyển về dạng ràng buộc nón được giải một cách hiệu quả, điều này đã được minh chứng trong các nghiên cứu [102, 54, 103, 106, 107, 117–122].

Mục tiêu của chương này là để phát triển lý thuyết đồng nhất hóa được tích hợp trong bài toán phân tích động học của kết cấu vi mô. Trường chuyển vị tổng tại cấp độ vi mô được xấp xỉ bằng phương pháp phần tử hữu hạn, thay vì trường chuyển vị biến thiên tuần hoàn được thực hiện trong các nghiên cứu [47–50, 123]. Do đó, bài toán phân tích giới hạn cho kết cấu vi mô vẫn bao gồm các ràng buộc như bài toán phân tích giới hạn cho kết cấu thông thường. Bên cạnh đó, hai ràng buộc được thêm vào đó là điều kiện biên tuần hoàn và điều kiện trung bình thể tích biến dạng vi mô bằng biến dạng tại một điểm vật liệu vĩ mô. Năng lượng tiêu tán dẻo hay hàm mục tiêu của bài toán tối ưu có thể chuyển về dạng tổng của các bình phương. Bài toán tối ưu hóa cuối cùng được chuyển về dạng bài toán tối ưu hóa tuyến tính với ràng buộc nón bậc hai, dạng bài toán này đã có công cụ giải quyết một cách hiệu quả. chú ý rằng hướng nghiên cứu ứng xử vĩ mô của vật liệu hỗn hợp và phần tử đại diện (RVE) đã được thực hiện theo phân tích tăng tải từng bước kết hợp lý thuyết đồng nhất hóa dựa trên việc xấp xỉ trường chuyển vị tổng trong [57, 124]. Trong [99], trường chuyển vị tổng đã được sử dụng trong việc kết hợp với điều kiện biên tuyến tính trong phân tích giới hạn cho vật liệu rỗng dạng lăng trụ. Trong chương này, phân tích giới hạn cận trên của vật liệu tuần hoàn được thực hiện trong dạng trường chuyển vị tổng và điều kiện biên tuần hoàn. Đóng góp

chính của phần này là việc khai triển bài toán tối ưu hóa cho kết cấu vi mô được rời rạc hóa bằng phương pháp phần tử hữu hạn với các ràng buộc dạng nón. Qua đó, tập hợp các điểm ứng suất giới hạn của kết cấu vi mô hình thành mặt dẻo hữu hiệu mà có thể áp dụng vào bài toán phân tích giới hạn cho kết cấu vĩ mô sau khi đã được đồng nhất hóa.

6.2 Vật liệu theo tiêu chuẩn Hill

Với lý thuyết đa tỉ lệ, thuộc tính hữu hiệu của vật liệu hỗn hợp có thể được xác định bằng cách giải quyết một bài toán phụ trên phần tử đại diện tuần hoàn của kết cấu vi mô. Bài toán này thể hiện được mối liên hệ giữa hai cấp độ vi mô và vĩ mô. Trong bài toán vi mô ngoài miền đàn hồi, hàm dẻo của vật liệu không đồng nhất có thể được xác định thông qua tập hợp các trường hợp ứng suất cực đại. Mô hình vật liệu cấp độ vi mô tuân theo trạng thái cứng dẻo lý tưởng và được thể hiện dưới dạng một hàm dẻo bậc hai. Gần đây, Li và các cộng sự [47, 48] đã đưa ra sự kết hợp giữa lý thuyết đồng nhất hóa trong bài toán phân tích giới hạn nhằm dự đoán được tiêu chuẩn dẻo của vật liệu. Tuy nhiên, hướng nghiên cứu này đã thực hiện các vòng lặp để xác định nghiệm của bài toán. Điều này sẽ được cải thiện khi áp dụng phương pháp trực tiếp để giảm chi phí tính toán.

Khi xây dựng bài toán trường động học trong phần tử thể tích đại diện (RVE), trường chuyển vị bao gồm hai thành phần như là trường hằng số ($\epsilon_M \mathbf{X}$) và trường biến thiên ($\tilde{\mathbf{u}}$). Trường chuyển vị tổng được rời rạc hóa và khai triển thành bài toán đồng nhất hóa cho phân tích động học của cấu trúc vi mô tuần hoàn theo tiêu chuẩn von Mises, Hill và Tsai được thể hiện như sau

$$\lambda^+ = \min \sigma^P \int_{\Omega} \sqrt{\epsilon^T \Theta \epsilon} \, d\Omega \quad (6.1a)$$

$$\text{s.t} \quad F(\mathbf{u}) = V_0 \Sigma_0^T \epsilon_M = 1 \quad (6.1b)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) - \epsilon_M \cdot \mathbf{X} \text{ tuần hoàn trên biên } \Gamma_d \quad (6.1c)$$

$$\epsilon_M = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \epsilon \, d\Omega \quad (6.1d)$$

Bài toán tối ưu hóa (6.1) có dạng gần giống với bài toán phân tích giới hạn thông thường cho kết cấu. Điểm khác biệt ở đây là điều kiện công ngoại lực tác dụng, điều kiện biên tuần hoàn và điều kiện trung bình biến dạng từ cấp độ vĩ mô (\mathbf{E}). Công ngoại lực của bài toán (6.1b) bằng tích của lực đơn vị và chuyển vị trên biên. Điều

kiện biên tuần hoàn là tuần hoàn về chuyển vị và tuần hoàn ngược về ứng suất với các cặp nút đối xứng trên biên. Cuối cùng là điều kiện biến dạng trung bình được tính trung bình biến dạng trên toàn miền thể tích của phần tử đại diện (RVE).

6.3 Phân tích giới hạn động học cho vật liệu tiêu chuẩn Hill

Trường chuyển vị được xấp xỉ bằng phần tử hữu hạn (FEM). Bài toán được rời rạc thành các miền phần tử $\Omega \approx \Omega_1 \cup \Omega_2 \dots \cup \Omega_{nel}$ và $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$ khi $i \neq j$ với nel là số phần tử. Khi đó trường chuyển vị và trường biến dạng ở cấp độ vi mô được xấp xỉ như sau

$$\mathbf{u}^h = \mathbf{N} \mathbf{d} \boldsymbol{\varepsilon}^h = \mathbf{B} \mathbf{d} \quad (6.2)$$

với \mathbf{N} là hàm dạng, \mathbf{B} là ma trận biến dạng-chuyển vị và \mathbf{d} là chuyển vị tại các nút phần tử.

Kỹ thuật tích phân điểm Gauss được sử dụng để thực hiện tích phân trên toàn miền thể tích phần tử đại diện RVE. Khi đó, hàm mục tiêu của bài toán tối ưu được xây dựng

$$D^{FEM} = \sum_{i=1}^{NG} \xi_i \sqrt{(\mathbf{B}_i \mathbf{d})^T \boldsymbol{\Theta} \mathbf{B}_i \mathbf{d}} \quad (6.3)$$

ξ_i là trọng số tích phân Gauss và NG là tổng số điểm Gauss trên toàn miền thể tích đại diện.

Tương tự như trên, ràng buộc để đảm bảo mối liên hệ giữa hai cấp độ vĩ mô và vi mô có thể khai triển

$$E = \frac{1}{|\Omega|} \sum_{i=1}^{NG} \xi_i \mathbf{B}_i \mathbf{d} \quad (6.4)$$

Tiếp theo, Sự chú ý sẽ tập trung vào việc xử lý điều kiện biên tuần hoàn của phần tử RVE. Biên của phần tử thể tích đại diện RVE được chia làm ba phần. Đầu tiên là các biên độc lập bao gồm các nút cạnh trên Γ_2^+ và các nút cạnh bên phải Γ_1^+ . Tiếp theo là các biên lệ thuộc tương ứng bao gồm các nút trên cạnh dưới Γ_2^- và các nút cạnh bên trái Γ_1^- . Cuối cùng là bốn nút tại bốn đỉnh của phần tử đại diện RVE. Điều kiện trước hết sẽ là tuần hoàn về lưới phần tử. Điều này có nghĩa là khi chia lưới tọa độ các nút thuộc biên độc lập và lệ thuộc phải đối nhau trên biên phần tử RVE. Tương ứng ta có các cặp tọa độ $\{\mathbf{x}^+, \mathbf{x}^-\}$ trên biên của phần tử thể tích đại diện RVE. Công thức (6.1) trở thành

$$\lambda^+ = \min \sum_{i=1}^{NG} \xi_i \sqrt{(\mathbf{B}_i \mathbf{d})^T \boldsymbol{\Theta} \mathbf{B}_i \mathbf{d}} \quad (6.5a)$$

$$\text{s.t} \quad \boldsymbol{\Sigma}^T \mathbf{E} = 1 \quad (6.5b)$$

$$\mathbf{C}\mathbf{d} = 0 \quad (6.5c)$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{|\Omega|} \sum_{i=1}^{NG} \xi_i \mathbf{B}_i \mathbf{d} \quad (6.5d)$$

6.4 Khai triển bài toán tiêu chuẩn Hill về dạng nón bậc hai

Bài toán phân tích giới hạn cho kết cấu vi mô tuần hoàn là một bài toán tối ưu với ràng buộc phi tuyến. Nhằm thuận lợi cho việc tính toán, bài toán được chuyển về dưới dạng bài toán tối ưu dạng nón bậc hai (SOCP). Dạng bài toán này đã được giải bằng thuật toán đối ngẫu điểm nội một cách hiệu quả bằng công cụ mosek. Trong bài toán ứng suất phẳng, $\boldsymbol{\Theta}$ là ma trận xác định dương (được sử dụng cho cả tiêu chuẩn von Mises và tiêu chuẩn Hill). Hàm mục tiêu, năng lượng tiêu tán dẻo, được viết lại dưới dạng tổng các bình phương như sau

$$D^{FEM} = \sum_{i=1}^{NG} \xi_i \|\mathbf{Q}^T \mathbf{B}_i \mathbf{d}\| \quad (6.6)$$

Với $\|\cdot\|$ là kí hiệu của căn bậc hai của các bình phương $\|\mathbf{v}\| = (\mathbf{v}^T \mathbf{v})^{1/2}$, và \mathbf{Q} là ma trận triển khai cholesky của $\boldsymbol{\Theta}$.

Các biến phụ $\boldsymbol{\rho}_i$ được thêm vào để đưa bài toán về dạng nón bậc hai (SOCP)

$$\boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{Q}^T \mathbf{B}_i \mathbf{d} \quad (6.7)$$

Bài toán đã được chuyển về dạng nón bậc hai như sau

$$\lambda^+ = \min \sum_{i=1}^{NG} \xi_i t_i \quad (6.8a)$$

$$\text{s.t} \quad \boldsymbol{\Sigma}^T \mathbf{E} = 1 \quad (6.8b)$$

$$\mathbf{C}\mathbf{d} = 0 \quad (6.8c)$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{|\Omega|} \sum_{i=1}^{NG} \xi_i \mathbf{B}_i \mathbf{d} \quad (6.8d)$$

$$\|\boldsymbol{\rho}_i\| \leq t_i, \quad i = 1, 2, \dots, NG \quad (6.8e)$$

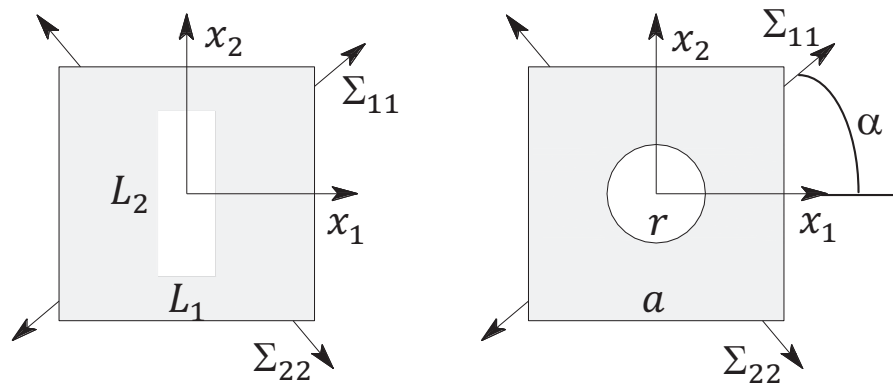
Phần tử đại diện (RVE) hình vuông có kích thước chuẩn $a \times a = 1 \times 1$ mm. Nghiệm của bài toán là tập hợp các tải trọng giới hạn của phần tử đại diện hay được xem là ứng suất giới hạn của điểm vật liệu vĩ mô. Qua đó, ứng suất giới hạn tại một điểm vật liệu cấp độ vĩ mô được xác định như sau

$$\Sigma_Y = \lambda^+ \Sigma_0 \quad (6.9)$$

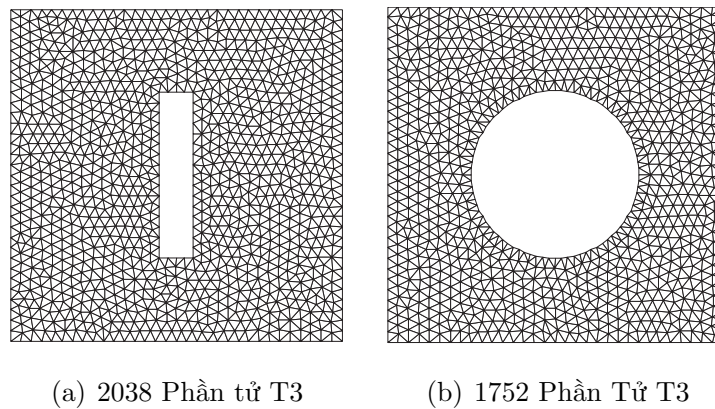
6.5 Ví dụ số

6.5.1 Thiết kế dẻo cho tấm có lỗ chịu kéo nén

Vật liệu có lỗ rỗng được xem xét như vật liệu hỗn hợp đặc biệt, và khả năng chịu tải trọng đóng một vai trò quan trọng trong thiết kế kết cấu. Hai ví dụ được thực hiện bao gồm tấm chịu kéo nén với lỗ hình chữ nhật và lỗ hình tròn. Phần tử đại diện này chịu tác dụng của thành phần ứng suất vĩ mô (Σ_{11}, Σ_{22}) trong mặt phẳng (x_1, x_2) được thể hiện trong hình 6.1. Vật liệu cốt nền cho kết cấu tấm có lỗ là aluminium Al với ứng suất chảy dẻo $\sigma_0 = 137\text{MPa}$, hay thép *St3S* với ứng suất chảy dẻo $\Sigma_0 = 273\text{MPa}$ cho vật liệu có lỗ hình tròn. Các bài toán này đã được so sánh với kết quả của Li và các cộng sự [47, 48] với khai triển phần tử hữu hạn động học kết hợp thuật giải lặp từng bước, hay được thực hiện bởi Zhang và cộng sự [125] với hướng tiếp cận dưới không nghiêm ngặt.

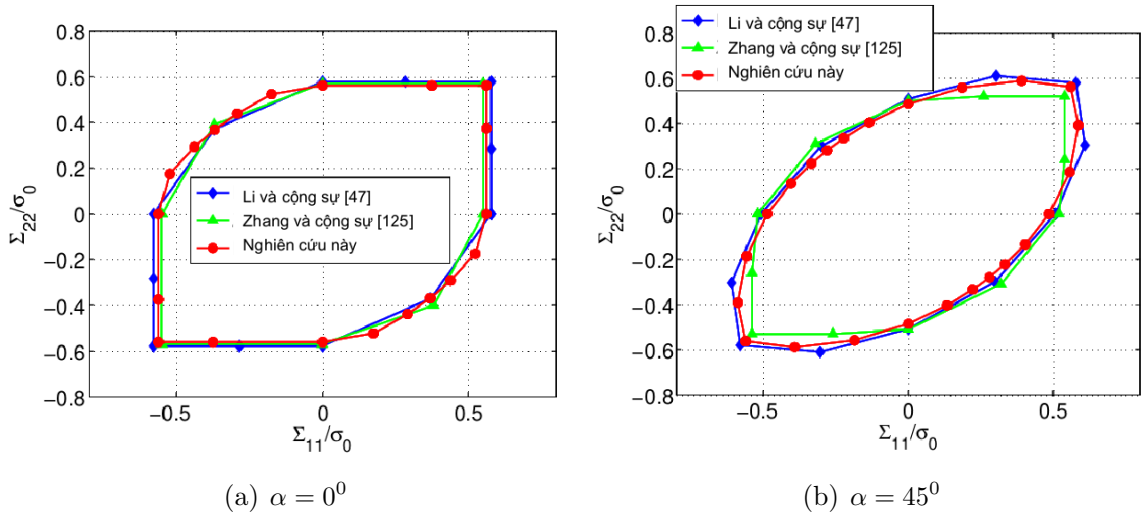


Hình 6.1: Ứng suất vĩ mô trong kết cấu tấm chịu kéo có lỗ

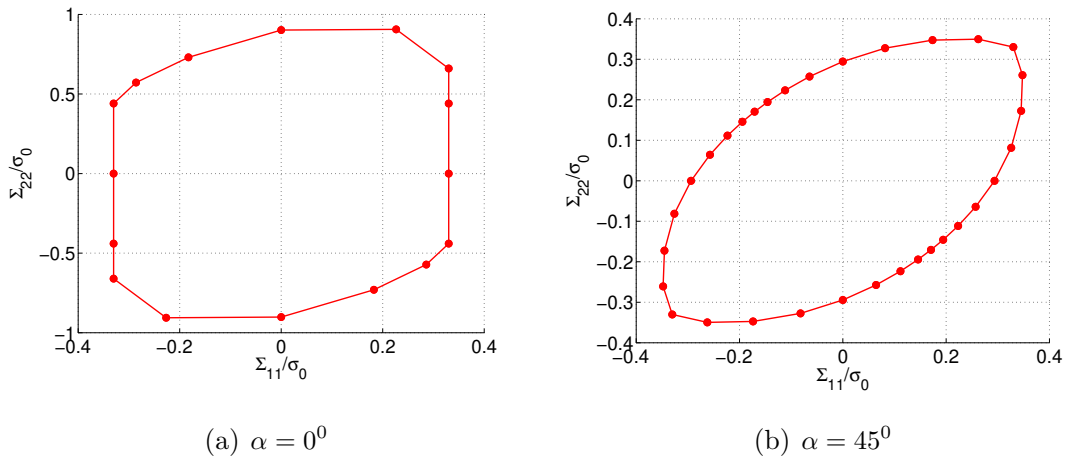


Hình 6.2: Lưới phần tử tam giác của hai Mẫu RVE vật liệu có lỗ.

Phần tử hữu hạn tam giác ba nút (T3) được sử dụng cho mô hình tính toán như hình 6.2. Miền cường độ ứng suất vĩ mô của vật liệu có lỗ hình tròn hay hình chữ nhật cho các trường hợp góc α ($\alpha = 0^\circ$ và 45°) được trình bày theo hình. Các kết quả số đạt được sự tương đồng khi so sánh với các nghiên cứu của Li và các cộng sự [47] và bởi Zhang và các cộng sự [125]. Một ghi chú rằng phương pháp bán cận dưới được trình bày trong [125] có thể cung cấp một nghiệm cao hơn so với cường độ vĩ mô thực sự.



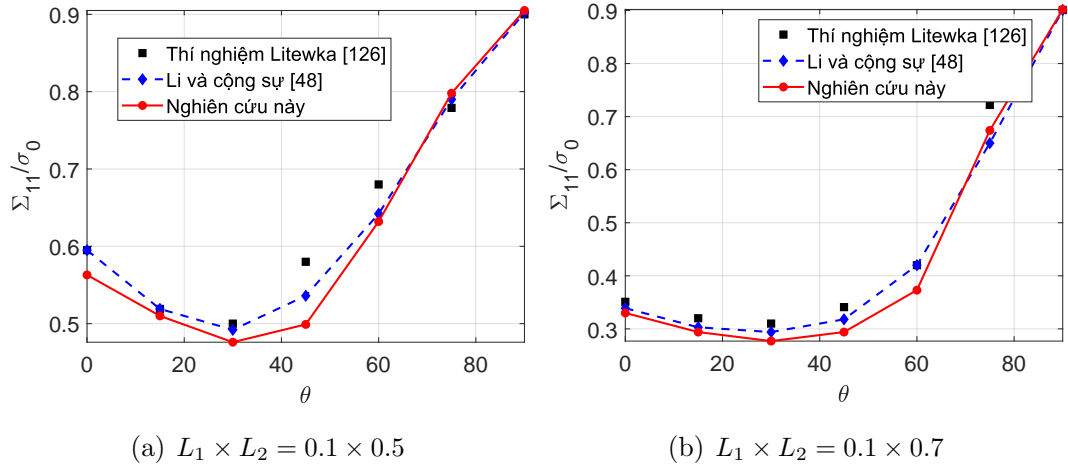
Hình 6.3: Miền cường độ ứng suất vĩ mô của vật liệu có lỗ hình tròn.



Hình 6.4: Miền cường độ ứng suất vĩ mô của vật liệu có lỗ hình chữ nhật.

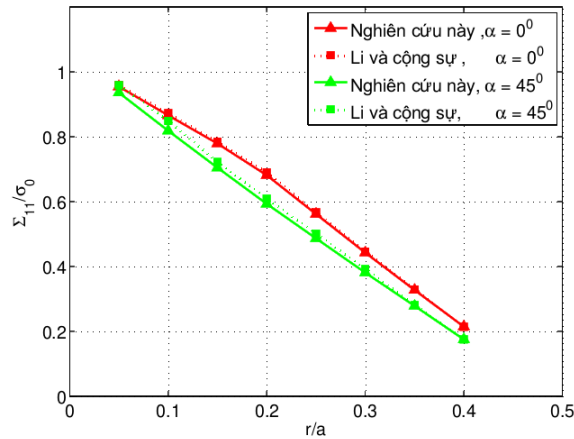
Bên cạnh đó, cường độ ứng suất kéo dọc trục của vật liệu có lỗ hình chữ nhật được khảo sát với góc α thay đổi dần $[0^\circ, 90^\circ]$ với hai kích thước lỗ khác nhau

$L_1 \times L_2 = 0.1 \times 0.5\text{mm}$ hay $0.1 \times 0.7\text{mm}$. Kết quả cường độ chịu kéo dọc trục với sự thay đổi góc kéo được thể hiện trong hình 6.5. Kết quả này tương đồng với kết quả của Li và các cộng sự [48] và thí nghiệm của Litewka [126].



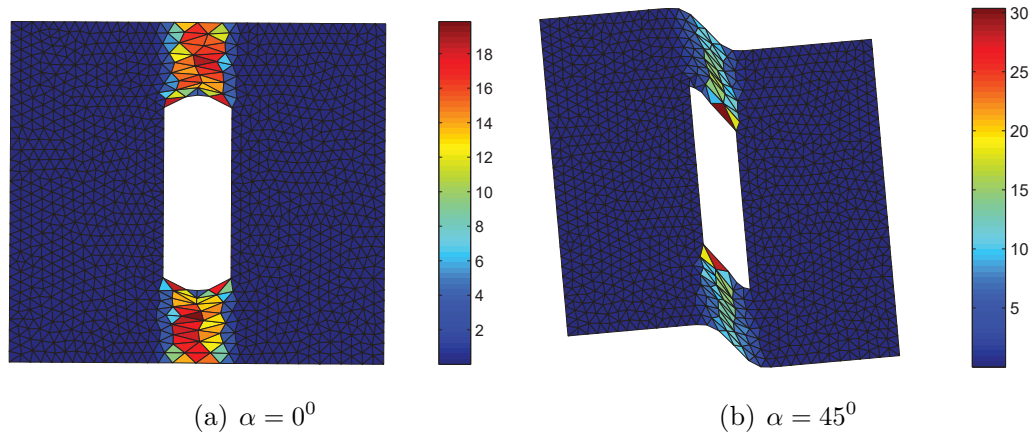
Hình 6.5: Cường độ kéo dọc trục với góc α của RVE lỗ hình chữ nhật.

Đối với mẫu vật liệu có lỗ hình tròn, cường độ chịu kéo dọc trục được khảo sát thay đổi khi tăng dần kích thước lỗ tròn. Hình 6.6 cho thấy rằng cường độ chịu kéo tỉ lệ nghịch với sự gia tăng kích thước lỗ rỗng. Điều này khá phù hợp với các kết quả của Li và các cộng sự [48].

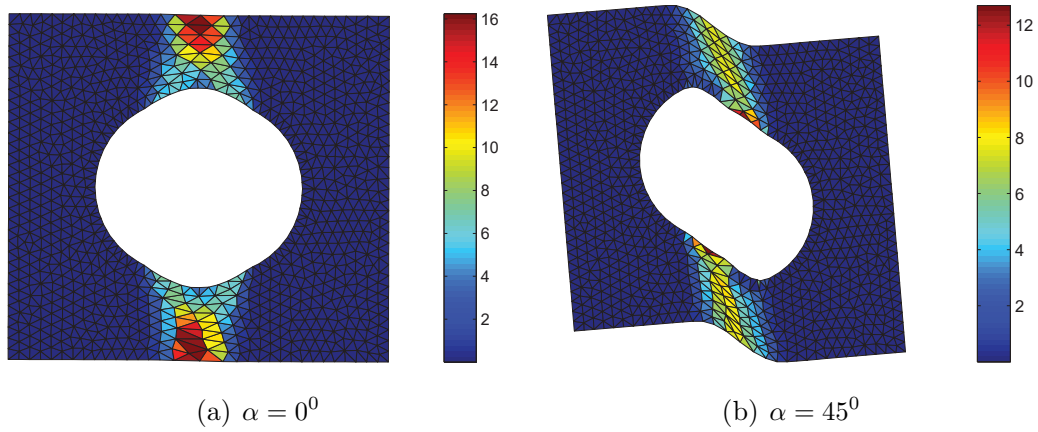


Hình 6.6: Cường độ kéo dọc trục khi góc α và bán kính (r/a) thay đổi.

Sự phân bố năng lượng tiêu tán dẻo thể hiện cơ cấu phá hoại của vật liệu có lỗ rỗng thông qua hình 6.7 và hình 6.8. Đối với RVE có lỗ hình chữ nhật và lỗ hình tròn, năng lượng tiêu tán dẻo tập trung tại khu vực vuông góc với lực kéo và vùng bị giảm yếu tiết diện trong cả hai trường hợp góc kéo $\alpha = 0^\circ$ và $\alpha = 45^\circ$.



Hình 6.7: Cơ cấu phá hoại của vật liệu có lỗ hình chữ nhật ($L_1 \times L_2 = 0.1 \times 0.5$).



Hình 6.8: Cơ cấu phá hoại của vật liệu có lỗ hình tròn ($r/a = 0.25$).

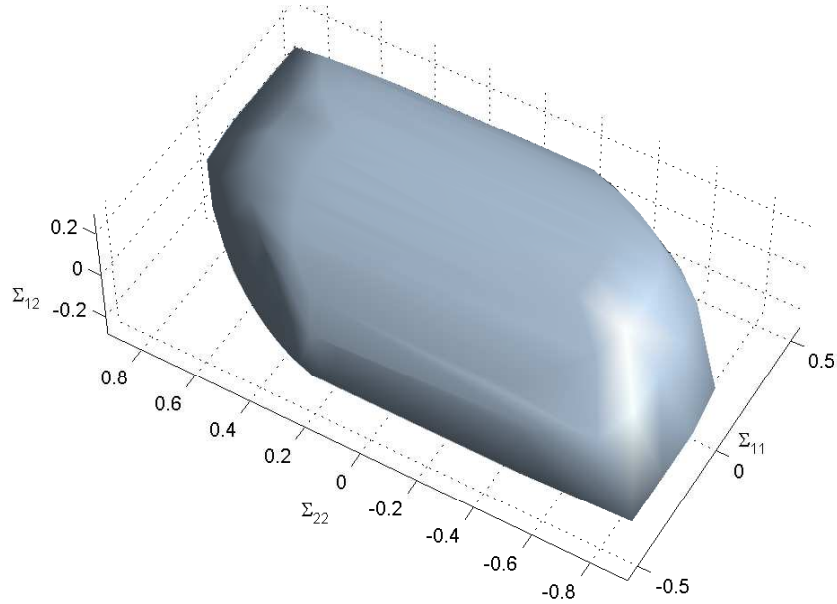
Bảng 6.1: Thời gian tính toán của phương pháp đề xuất.

nghiên cứu này			Li và các cộng sự [48]		
BTD	Thời gian * (s)	Σ_{11}/σ_0	BTD	Thời gian (s)	Σ_{11}/σ_0
642	<1	0.5689	320	10	0.5743
2236	2	0.5626	896	22	0.5658
8140	6	0.5561	1920	95	0.5600

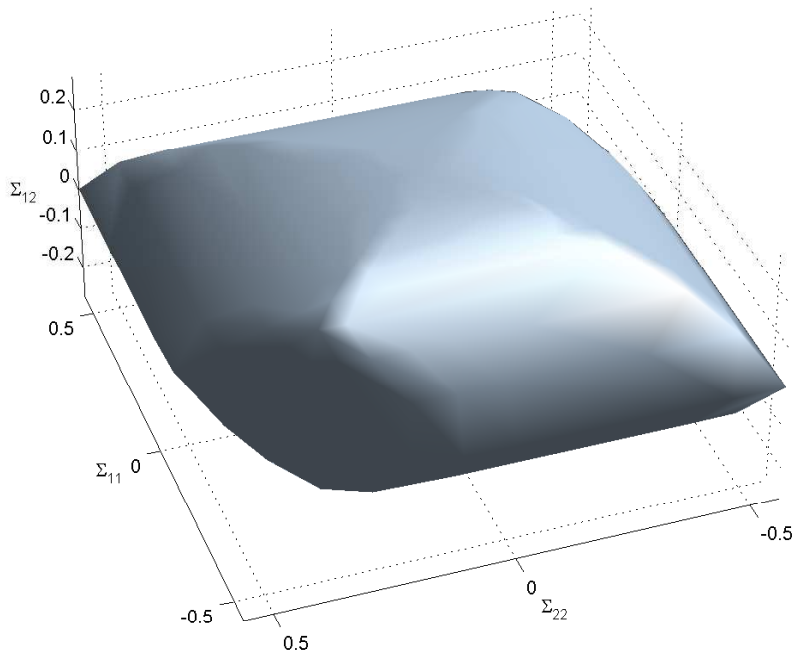
* Sử dụng công cụ MOSEK trên máy tính CPU 2.8GHz Pentium 4.

Tiếp theo, hiệu quả của phương pháp phân tích giới hạn kết hợp kỹ thuật đồng nhất hoá cho vật liệu có lỗ rỗng mà được đề xuất sẽ được đánh giá. Ba lưới phần tử được xem xét cho việc tính toán của thuộc tính hữu hiệu của kết cấu RVE có lỗ hình chữ nhật ($L_1 \times L_2 = 0.1 \times 0.5$). Từ bảng 6.1, chúng ta có thể thấy được rằng

phương pháp phân tích giới hạn của kết cấu đồng nhất hoá cung cấp một nghiệm rất nhanh chóng cho bài toán tối ưu hoá với ràng buộc dạng nón bậc hai, chỉ tốn 6 giây cho bài toán tối ưu hoá lên đến 40000 biến.



Hình 6.9: Mặt chảy dẻo 3D của vật liệu có lỗ chữ nhật trong $(\Sigma_{11}, \Sigma_{22}, \Sigma_{12})$.

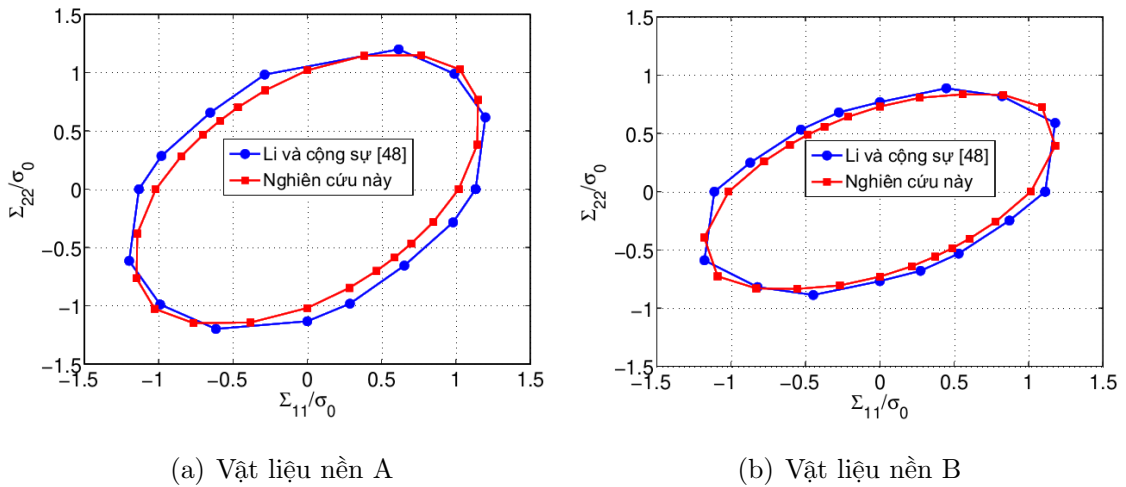


Hình 6.10: Mặt chảy dẻo 3D của vật liệu có lỗ tròn trong $(\Sigma_{11}, \Sigma_{22}, \Sigma_{12})$.

Khi ứng suất tại cấp độ vi mô Σ mà có kể đến thành phần ứng suất cắt Σ_{12} , miền cường độ hữu hiệu của vật liệu được thể hiện dưới không gian ba chiều như hình 6.10 cho vật liệu có lỗ hình tròn và hình 6.9 cho vật liệu có lỗ hình chữ nhật. Khi xem xét kết cấu vi mô phân bố trục hướng trong trường hợp lỗ hình chữ nhật thì cường độ chịu kéo theo hai phương khác nhau với vật liệu nền. Với trường hợp tấm có lỗ hình chữ nhật cường độ vĩ mô theo Σ_{22} lớn hơn so với theo Σ_{11} và bằng nhau khi xem xét kết cấu RVE có lỗ tròn.

6.5.2 Thiết kế dẻo cho tấm kim loại gia cường cốt sợi

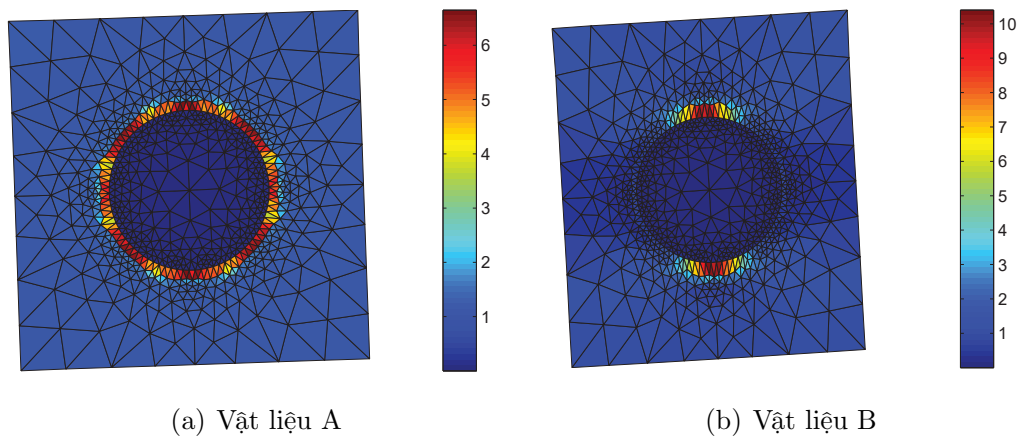
Trong ví dụ này, hỗn hợp kim loại gia cường cốt sợi được xem xét để nghiên cứu sự ảnh hưởng của mối liên hệ bất đẳng hướng đến cường độ vĩ mô của vật liệu đồng nhất hoá tương đương. Cốt sợi được giả thuyết là vật liệu đẳng hướng và tuân theo tiêu chuẩn von Mises, trong khi đó vật liệu nền được giả thiết bất đẳng hướng và tiêu chuẩn chảy dẻo của nó được thể hiện theo tiêu chuẩn của Hill. Biên giữa vật liệu nền và vật liệu cốt sợi được giả thiết là tuyệt đối.



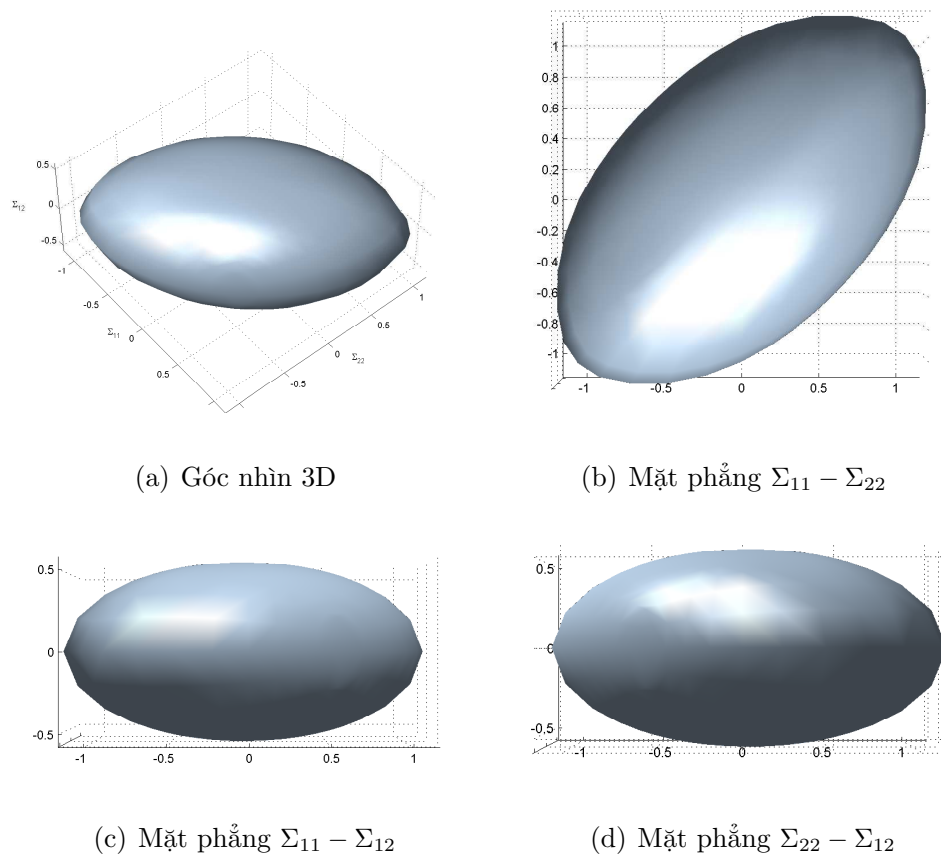
Hình 6.11: Miền cường độ vĩ mô của vật liệu hỗn hợp cốt sợi.

Các trường hợp tải trọng giới hạn của vật liệu hỗn hợp cốt sợi dưới ứng suất pháp theo hai phương được thể hiện trong hình 6.12. Một điều mà có thể thấy qua hình đó là sự phân bố năng lượng tiêu tán dẻo chủ yếu tập trung vào vật liệu nền, điều này có nghĩa là cường độ trung bình vĩ mô của hỗn hợp được quyết định bởi pha vật liệu yếu hơn (vật liệu nền).

Miền cường độ vĩ mô của vật liệu hỗn hợp cốt sợi dưới lực tác dụng của ba tải

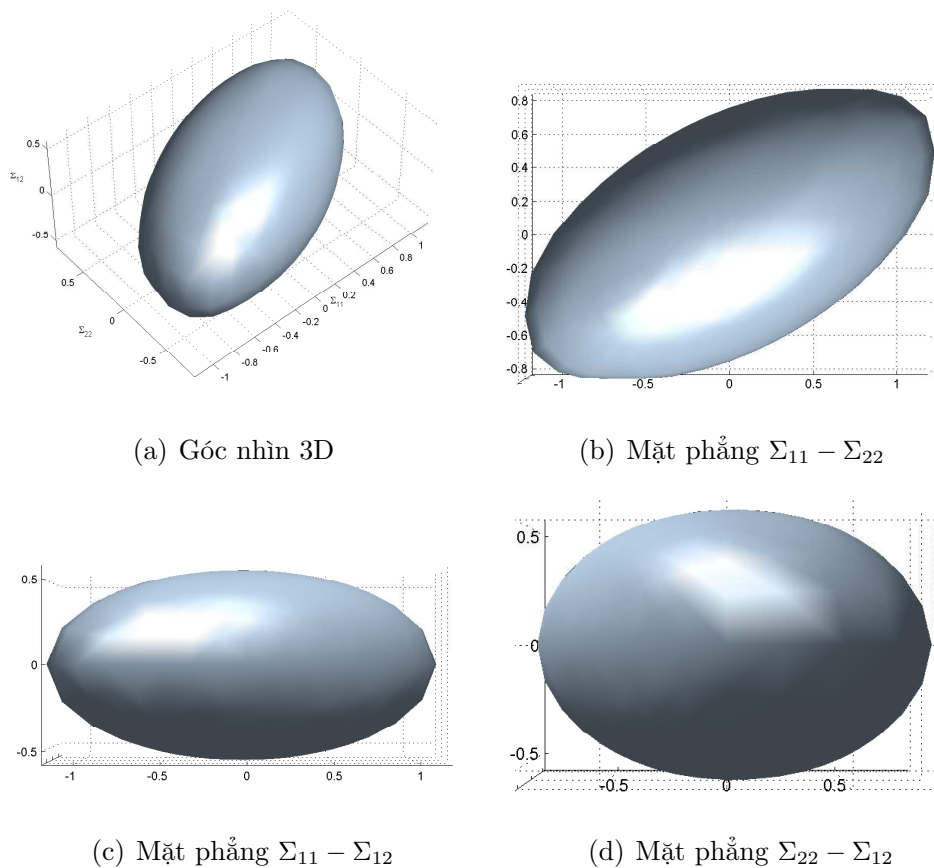


Hình 6.12: Cơ cấu phá hoại của vật liệu hỗn hợp cốt sợi: tải dọc trục hai phương.



Hình 6.13: Miền cường độ vĩ mô của vật liệu hỗn hợp cốt sợi: vật liệu A.

trọng từ vĩ mô độc lập $(\Sigma_{11}, \Sigma_{22}, \Sigma_{12})$ được thể hiện trong hình 6.13 và 6.14. Một điều có thể nhận ra rằng trong trường hợp vật liệu B cường độ vĩ mô theo phương Σ_{11} lớn hơn nhiều lần so với theo phương Σ_{22} . Trong trường hợp vật liệu A thì



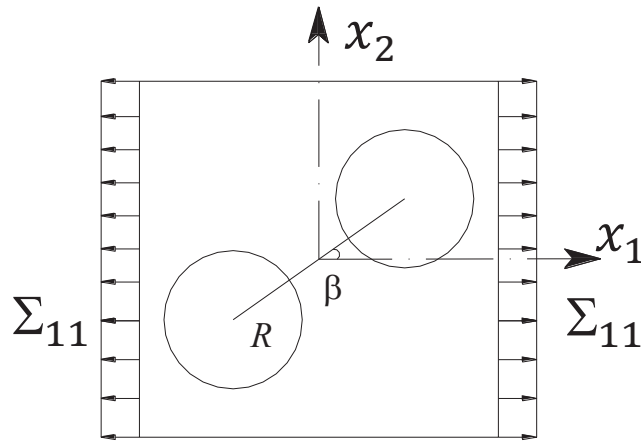
Hình 6.14: Miền cường độ vĩ mô của vật liệu hỗn hợp cốt sợi: vật liệu B.

cường độ vĩ mô theo hai phương đều bằng nhau.

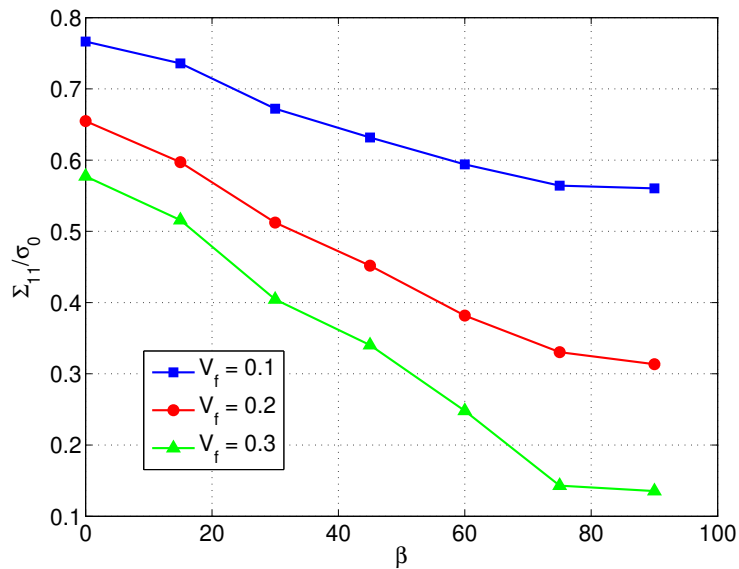
6.5.3 Thiết kế dẻo cho vật liệu có hai lỗ

Ảnh hưởng của vị trí lỗ rỗng đến cường độ kéo dọc trục và cơ cấu phá hoại của vật liệu vĩ mô được nghiên cứu trong phần này. Tấm vật liệu tuân theo tiêu chuẩn von Mises khoét lỗ bao gồm hai lỗ với kích thước cho trước mà đường nối hai tâm lỗ hợp một góc β với hướng của tải trọng (trục x). Hình học của bài toán được thể hiện thông qua hình 6.15. Bán kính của lỗ được xác định qua công thức $r = \sqrt{W_f/2\pi}$, với W_f là thể tích lỗ rỗng. Tọa độ trọng tâm của lỗ được tính toán theo công thức $x_{1i} = \pm(0.05 + r) \cos \beta$, $x_{2i} = \pm(0.05 + r) \sin \beta$. Bài toán được tính toán trên 2176 phần tử T3.

Sự ảnh hưởng của góc β lên cường độ vĩ mô chịu kéo với các thể tích lỗ rỗng V_f được chứng minh trong hình 6.16. Trong các trường hợp, các kết quả đều có khuynh hướng giảm cường độ vĩ mô chịu kéo khi tăng dần góc β .

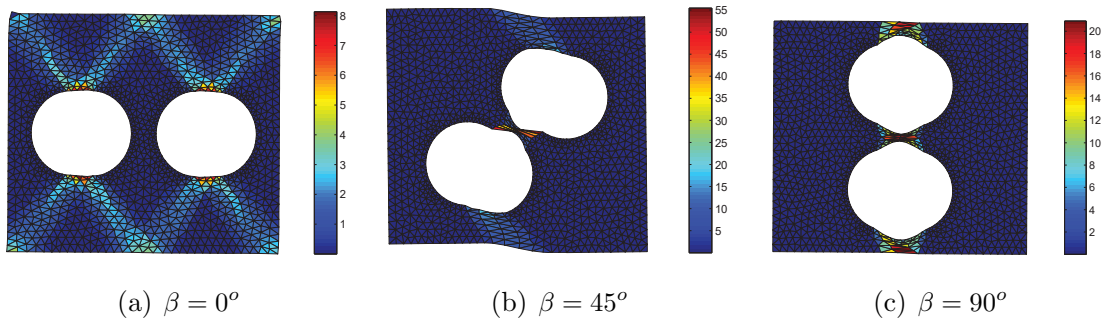


Hình 6.15: Vật liệu khoét lỗ bao gồm hai lỗ với các vị trí khác nhau.



Hình 6.16: Sự ảnh hưởng của việc bố trí lỗ rỗng đến cường độ vĩ mô chịu kéo.

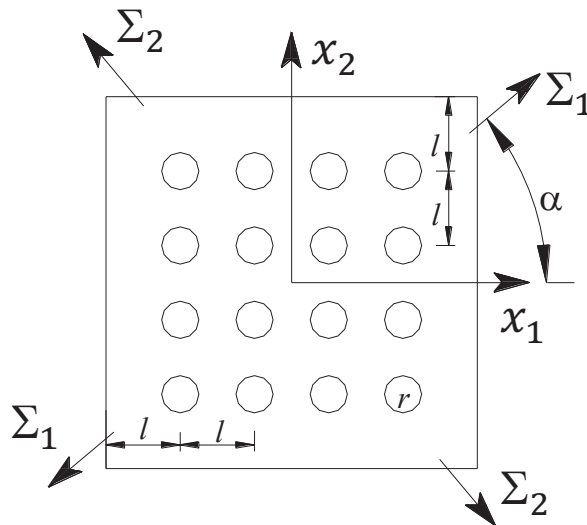
Cơ cấu phá hoại của vật liệu khoét lỗ bao gồm hai lỗ với các góc $\beta = [0^\circ, 45^\circ, 90^\circ]$ được thể hiện trong hình 6.17. Với trường hợp $\beta = 0^\circ$, năng lượng tiêu tán tập trung thành những đường chéo góc từ mép tâm đến mép của lỗ. Với trường hợp $\beta = 45^\circ$ và 90° thì năng lượng tiêu tán tập trung dọc theo đường nối hai tâm lỗ.



Hình 6.17: Cơ cấu phá hoại của vật liệu bị khoét hai lỗ dưới tải trọng dọc trục.

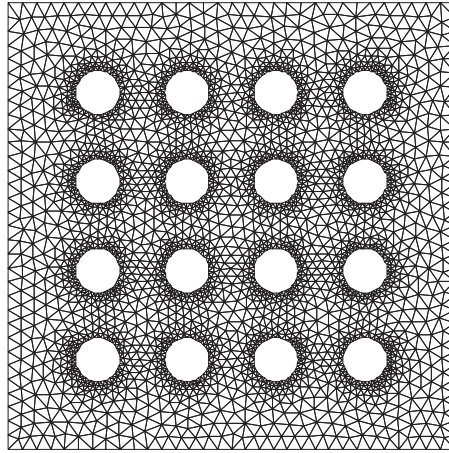
6.5.4 Thiết kế dẻo cho tấm có nhiều lỗ chịu kéo nén

Trong ví dụ này, tấm mỏng hình vuông tuân theo tiêu chuẩn von Mises với 4x4 lỗ tròn được xem xét như hình 6.18. Một lưới phần tử hữu hạn (5622 phần tử T3) được sử dụng để rời rạc hóa bài toán như hình 6.19. Qua đó, ảnh hưởng của nhóm lỗ rỗng được xem xét với vật liệu nền tuân theo tiêu chuẩn dẻo von Mises.

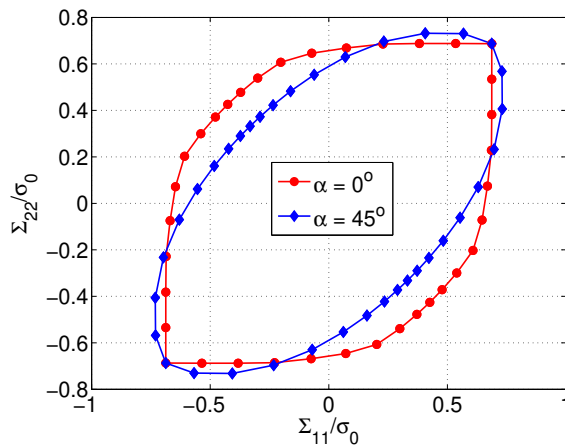


Hình 6.18: Bài toán vật liệu thép lỗ đều: $l/a = 0.2$, $2r/a = 0.1$

Cường độ vĩ mô chịu kéo và cơ cấu phá hoại của tấm bị khoét lỗ trong các hướng áp đặt tải khác nhau được thể hiện trong hình 6.20 và 6.21. Khi quan sát miền cường độ vĩ mô của bài toán với các góc kéo $\alpha = 0^\circ$ và 45° , hình dạng biểu đồ thay đổi khá rõ. riêng trường hợp $\alpha = 45^\circ$ thì biểu đồ gần với dạng elip. Ngoài ra, hai điểm đầu của biểu đồ (tại vị trí $\Sigma_{11} = \Sigma_{22}$) thì hai trường hợp đều trùng khớp.



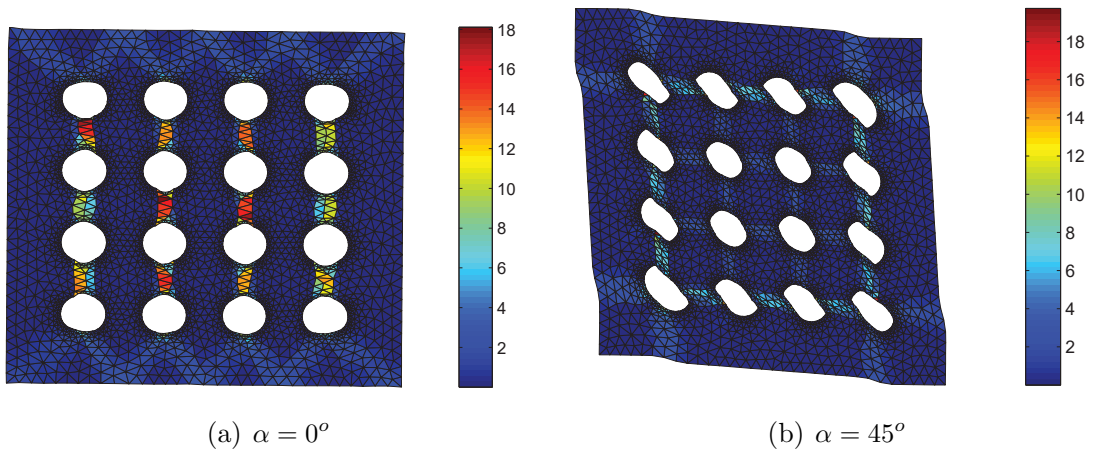
Hình 6.19: Bài toán vật liệu thép bị khoét lỗ đều: lưới phần tử hữu hạn.



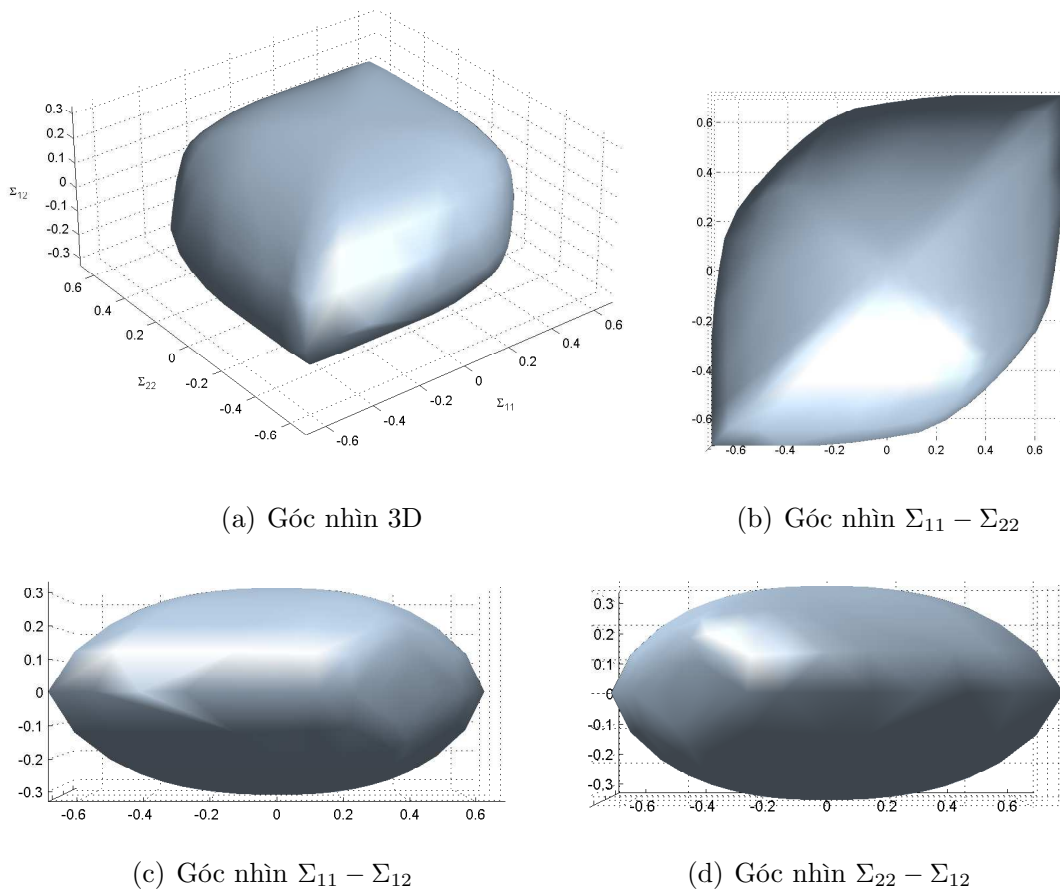
Hình 6.20: Bài toán tấm khoét nhiều lỗ: cường độ vĩ mô với góc kéo α thay đổi.

Khi xem xét về cơ cấu phá hoại của trường hợp $\alpha = 0^\circ$, năng lượng tiêu tán dẻo hình thành các đường chéo góc với lỗ biên tâm và các đường dọc nối các tâm lỗ. Với trường hợp $\alpha = 45^\circ$, năng lượng tiêu tán có xu hướng hình thành các tâm lỗ và vuông góc với các lỗ biên.

Miền cường độ vĩ mô của tấm khoét lỗ dưới tác dụng của ba ứng suất độc lập $(\Sigma_{11}, \Sigma_{22}, \Sigma_{12})$ được thể hiện trong hình 6.22. Hình dạng của miền cường độ vĩ mô trong trường hợp tấm nhiều lỗ tương tự với khi xem xét trường hợp một lỗ (khi xem xét bài toán nhiều lỗ với khoảng cách từ lỗ đến biên gần bằng 1/2, kết quả bài toán xem xét sẽ cho giá trị tương đương với việc xem xét một thể tích đơn vị với điều kiện biên tuần hoàn. Vì vậy, sự khác biệt giữa hai bài toán tập trung lớn của sự ảnh hưởng của điều kiện biên.



Hình 6.21: Bài toán tấm khoét nhiều lỗ: cơ cấu phá hoại.



Hình 6.22: Miền cường độ vĩ mô 3D của tấm nhiều lỗ ($\Sigma_{11}, \Sigma_{22}, \Sigma_{12}$).

6.6 Kết luận thiết kế dẻo vật liệu theo tiêu chuẩn Hill

Chương này đã trình bày một hướng tiếp cận số với kỹ thuật đồng nhất hóa nhằm xác định cường độ của vật liệu không đồng nhất và dự đoán cơ cấu phá hoại của cấu trúc vi mô. Dựa theo lý thuyết đồng nhất hóa và phân tích giới hạn, bài toán phân tích giới hạn cận trên (trường động học) được xây dựng cho kết cấu vi mô tuần hoàn. Trường chuyển vị tổng của bài toán vi mô được xấp xỉ. Bài toán tối ưu hóa, được khai triển về dạng bài toán tối ưu hóa với ràng buộc nón bậc hai, tương đồng với bài toán phân tích giới hạn của kết cấu nhưng được kể thêm hai điều kiện (điều kiện biên tuần hoàn và điều kiện trung bình hóa biến dạng của cấu trúc vi mô bằng với biến dạng từ điểm vật liệu cấu trúc vĩ mô). Các ví dụ số được thực hiện nhằm khảo sát sự ảnh hưởng của điều kiện tải trọng, thể tích cốt sợi hay lỗ rỗng đến cường độ hữu hiệu của tấm khoét lỗ hay gia cường sợi. Với ba thành phần ứng suất độc lập (Σ_{11} , Σ_{22} , Σ_{12}) được thành lực phân bố đều trên biên phần tử đại diện tuần hoàn. Miền ứng suất giới hạn tại một điểm vật liệu vĩ mô được xác định dưới dạng không gian ba chiều.

Công bố liên quan đến thiết kế dẻo vật liệu theo tiêu chuẩn Hill

Bài báo tạp chí quốc tế thuộc danh mục ISI

1. C.V. Le, **P.H. Nguyen**, H. Askes, & C.D. Pham. “A computational homogenization approach for limit analysis of heterogeneous materials”. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 112(10), 1381-1401, 2017.

Chương tiếp theo sẽ mở rộng tiêu chuẩn dẻo Tsai-Wu (cường độ chịu kéo và nén theo hai phương có thể khác nhau) nhằm mở rộng phạm vi đánh giá các vật liệu thực tế.

Chương 7

Miền cường độ hữu hiệu cho vật liệu theo tiêu chuẩn Tsai-Wu

7.1 Giới thiệu

Lý thuyết đồng nhất hoá ở trạng thái giới hạn đang được phát triển cho việc xác định cường độ hữu hiệu của vật liệu không đồng nhất tuần hoàn qua các thập kỉ gần đây như [127, 94, 95, 128, 48, 50, 129–131, 106]. Phương pháp đồng nhất hoá kết hợp phân tích giới hạn thông thường được thực hiện qua hai bước: i) tính toán một tiêu chuẩn dẻo hữu hiệu thông qua bài toán phân tích giới hạn của tại cấp độ vi mô, mà được trung bình của các kết quả tải trọng giới hạn kết hợp lý thuyết đồng nhất hoá, và ii) áp dụng tiêu chuẩn dẻo hữu hiệu của bài toán vi mô cho một điểm vật liệu của bài toán cấp độ vĩ mô.

Tại mỗi điểm vật liệu, một phần tử thể tích đại diện (RVE) được khai báo và các thông tin từ cấp độ vĩ mô được thực hiện như các điều kiện biên của RVE. Có hai hướng tiếp cận để xác định dựa trên những thông tin từ cấp độ vĩ mô. Hướng tiếp cận biến dạng mà biến dạng từ cấp độ vĩ mô được áp đặt thành điều kiện biên động học của bài toán RVE. Trong khi đó, hướng tiếp cận ứng suất mà ứng suất tại cấp độ vĩ mô được áp đặt thành điều kiện biên tĩnh học của bài toán RVE như [129]. Ngoài ra, hướng tiếp cận kết hợp lý thuyết phân tích giới hạn và kỹ thuật đồng nhất hoá có thể áp đặt cả lý thuyết động học và tĩnh học như [129, 132, 106, 54]. Điều đáng chú ý rằng khi sử dụng hướng tiếp cận biến dạng, một vấn đề yêu cầu cần kết nối giữa miền biến dạng của cấp độ vĩ mô và miền ứng suất hoặc miền cường độ của bài toán vĩ mô. Trong [54, 106], lý thuyết động học được kết hợp với phương pháp điều khiển biến dạng hay độ cong, và tiêu chuẩn cường độ vĩ mô được xác định bằng các cực tiểu hàm hỗ trợ được thể hiện trong hàm số với các biên là biến dạng hay độ cong của cấp độ vĩ mô. Hơn thế nữa, miền chuyển vị của cấp độ vĩ mô có thể đạt được bởi việc kết hợp lý thuyết phân tích giới hạn tĩnh học vào

hướng tiếp cận biến dạng, mà trong đó trường chuyển vị vĩ mô có thể được kể đến trong tải trọng trên biên phần tử đại diện RVE [129, 132]. Một miền cường độ vĩ mô hỗ trợ trong phương chính thu được với sự hỗ trợ của trường hợp cụ thể của lý thuyết đồng nhất hoá, cụ thể là trung bình của ứng suất dư bằng không.

Bên cạnh đó, hướng tiếp cận ứng suất thì ứng suất tại cấp độ vĩ mô được áp đặt thành điều kiện biên tĩnh học trên bài toán RVE, đã được phát triển kết hợp với lý thuyết phân tích giới hạn như [128, 48, 50, 130, 131]. Với việc sử dụng của lý thuyết phân tích giới hạn tĩnh học và phần tử hữu hạn được rời rạc hoá trường ứng suất, phương pháp điều khiển ứng suất được thực hiện trong [54, 106] có thể cung cấp một cách trực tiếp miền cường độ ứng suất của vật liệu không đồng nhất tuần hoàn. Trong những trường hợp này, phần tử hữu hạn dựa trên ứng suất thì khó có thể xây dựng, cụ thể trường ứng suất bậc cao mà phải đảm bảo điều kiện cân bằng, một phương pháp phân tích giới hạn gần tĩnh học kết hợp lý thuyết đồng nhất hoá đã được mô tả trong [129, 132]. Trong phương pháp này, trường động học ảo được xấp xỉ và phương trình cân bằng được áp đặt dưới dạng yếu. Mặt khác, phương pháp điều khiển ứng suất có thể được kết hợp với lý thuyết phân tích giới hạn động học như [128, 48, 50], cho phép sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn xấp xỉ trường chuyển vị. Phương pháp này đã được phát triển trong chương 6, các công thức kết nối giữa hai cấp độ trong bài toán kết hợp kỹ thuật phân tích giới hạn và lý thuyết đồng nhất hoá. Sự kết hợp này dẫn đến bài toán tối ưu hoá dạng nón và kết quả của nó là các điểm giới hạn của vật liệu không đồng nhất. Khi tập hợp các điểm trên bề mặt của miền cường độ vật liệu thu được bằng nghiệm tối ưu hoá của bài toán phân tích giới hạn kết hợp đồng nhất hoá ở cấp độ vĩ mô, một bước quan trọng tiếp theo là xác định được tiêu chuẩn dẻo hữu hiệu để thực hiện cho bài toán cấp độ vĩ mô. Có hai cách để thu được tiêu chuẩn dẻo: i) tìm những công thức toán mà xác thích hợp nhất, và ii) xác định các hệ số của các dạng hàm tiêu chuẩn dẻo có sẵn [130]. Nhằm giải quyết sự không chắc chắn của các hệ số mà các phương pháp trước đây gặp phải. Trong [48, 130], tiêu chuẩn Hill được sử dụng mô phỏng ứng xử dẻo của các thành phần, và các hệ số chưa biết được xấp xỉ dựa trên kết quả số và kỹ thuật bình phương cực tiểu.

Mục tiêu của chương này là mở rộng hướng phân tích giới hạn kết hợp kỹ thuật đồng nhất hoá như chương 6 đã thực hiện cho tiêu chuẩn von Mises và Hill thành tiêu chuẩn tổng quát hơn là TSai-Wu. Năng lượng tiêu tán dẻo của vật liệu không đồng nhất tuân theo tiêu chuẩn TSai-Wu được biểu diễn dưới dạng tổng của bình phương. Điều này tạo thuận lợi khi chuyển các dạng tiêu chuẩn dẻo về dạng nón và phát biểu bài toán dưới dạng tối ưu hoá có các ràng buộc nón. Một số lớn các

điểm của miền cường độ được xác định, và tiêu chuẩn dẻo hữu hiệu dạng TSai-Wu cho bài toán cấp độ vĩ mô được thực hiện. Sự ảnh hưởng của ứng xử dẻo của các thành phần chảy dẻo được xem xét, các trường hợp phá hoại của cấu trúc vi mô ở trạng thái giới hạn được thể hiện. Hai dạng cấu trúc vật liệu vi mô là phân bố đều và phân bố ngẫu nhiên đều được xem xét. Đặc biệt đối với vật liệu có lỗ rỗng ngẫu nhiên, biên trong và biên ngoài của miền dẻo hữu hiệu được trình bày.

7.2 Vật liệu theo tiêu chuẩn TSai-Wu

7.2.1 Tiêu chuẩn dẻo TSai-Wu

Tiêu chuẩn dẻo TSai cho vật liệu cứng dẻo lý tưởng (các thành phần của một hỗn hợp) với một luật chảy dẻo như sau

$$\Psi(\boldsymbol{\sigma}) = \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{Q} - 1 = 0 \quad (7.1)$$

Với \mathbf{P} và \mathbf{Q} là các ma trận thông số vật liệu của thuộc tính cường độ của vật liệu. Với \mathbf{P} là ma trận xác định dương hoặc bán xác định dương.

Đối với vật liệu bất đẳng hướng, tiêu chuẩn dẻo TSai-Wu thường được sử dụng với phát biểu trong trường hợp ứng suất phẳng $\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}]^T$ ($\tau_{12} \equiv \sigma_6$), các ma trận vật liệu hữu hiệu \mathbf{P} và \mathbf{Q} được định nghĩa như sau

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{16} \\ P_{12} & P_{22} & P_{26} \\ P_{16} & P_{26} & P_{66} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_6 \end{Bmatrix} \quad (7.2)$$

Với

$$F_1 = \frac{1}{\sigma_{p1}^T} + \frac{1}{\sigma_{p1}^C}, \quad F_2 = \frac{1}{\sigma_{p2}^T} + \frac{1}{\sigma_{p2}^C}, \quad F_6 = \frac{1}{\tau_{p12}^+} + \frac{1}{\tau_{p12}^-} \quad (7.3)$$

$$P_{11} = -\frac{1}{2\sigma_{p1}^T \sigma_{p1}^C}, \quad P_{22} = -\frac{1}{2\sigma_{p2}^T \sigma_{p2}^C}, \quad P_{66} = -\frac{1}{2\tau_{p12}^+ \tau_{p12}^-} \quad (7.4)$$

Trong đó σ_{pi}^T và σ_{pi}^C ($i = 1, 2$) ứng suất dẻo chịu kéo và nén của vật liệu theo hướng x_i , τ_{p12}^+ và τ_{p12}^- là cường độ chịu cắt của hướng đối diện cho τ_{12} , và dạng tương tác P_{12} , P_{16} và P_{26} được xác định bởi thí nghiệm kéo hai trục. Nhằm thuận tiện trong việc chuyển đổi năng lượng tiêu tán dẻo, tiêu chuẩn dẻo (7.1) có thể viết lại dưới dạng tương đương

$$\psi(\boldsymbol{\sigma}) = \sqrt{\boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\Theta} \boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{Q} \leq \sigma_p \quad (7.5)$$

Với σ_p là ứng suất chảy dẻo tham khảo, và các ma trận Θ và \mathbf{Q} được xác định

$$\Theta = \frac{\sigma_p^2}{2} \left[\mathbf{P} + \frac{1}{2} \mathbf{F} \mathbf{F}^T \right], \quad \mathbf{Q} = \frac{\sigma_p}{2} \mathbf{F} \quad (7.6)$$

Đối với vật liệu trục hướng, đó là $\tau_{p12}^+ = \tau_{p12}^-$, and $F_6 = P_{16} = P_{26} = 0$, ma trận vật liệu hữu hiệu Θ and \mathbf{Q} được thể hiện như

$$\Theta = \begin{bmatrix} \alpha_{xx} + \alpha_{xy} & -\alpha_{xy} & 0 \\ -\alpha_{xy} & \alpha_{yy} + \alpha_{xy} & 0 \\ 0 & 0 & 3\eta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7.7)$$

với

$$Q_x = \frac{\sigma_p}{2} F_x = \frac{\sigma_p}{2} F_1, \quad Q_y = \frac{\sigma_p}{2} F_y = \frac{\sigma_p}{2} F_2 \quad (7.8)$$

$$\alpha_{xx} = \frac{\sigma_p^2}{2} \left[A_{xx} + \frac{1}{2} F_x (F_x + F_y) \right] \quad (7.9)$$

$$\alpha_{yy} = \frac{\sigma_p^2}{2} \left[A_{yy} + \frac{1}{2} F_y (F_x + F_y) \right] \quad (7.10)$$

$$\alpha_{xy} = \frac{\sigma_p^2}{2} \left[A_{xy} + \frac{1}{2} F_x F_y \right] \quad (7.11)$$

$$\eta = \sigma_p^2 H \quad (7.12)$$

Trong đó A_{ij} là các ứng suất chảy dẻo đơn trục trong ba phương trục hướng của vật liệu, với $z = x_3$ là trục trục hướng, và $x = x_1, y = x_2$ là hai hướng chính của vật liệu, và mối liên hệ P_{ij} bởi

$$P_{11} = A_{xx} + A_{xy}, \quad P_{22} = A_{yy} + A_{xy}, \quad P_{12} = -A_{xy}, \quad P_{66} = 3H \quad (7.13)$$

Tiêu chuẩn phá hoại TSai-Wu là dạng tổng quát của hai tiêu chuẩn dẻo đã biết, trường hợp đặc biệt là Hill và von Mises. Khi thiết lập $F_x = F_y = 0$, tiêu chuẩn phá hoại TSai-Wu rút gọn thành dạng ứng suất phẳng của tiêu chuẩn Hill. Trong trường hợp đó hằng số A_{ij} và thông số cường độ chịu cấ H bằng với trường hợp đẳng hướng, trở thành tiêu chuẩn von Mises.

7.2.2 Hàm năng lượng tiêu tán theo tiêu chuẩn Tsai-Wu

Khi tiếp cận bài toán phân tích giới hạn theo cận trên, hướng tiếp cận động học, trường biến dạng dẻo được rời rạc. Trường biến dạng dẻo được giả thiết tuân theo luật chuẩn, và được xác định theo công thức

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mu \frac{\partial \psi(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = 2\mu \Theta \boldsymbol{\sigma} + \mu \mathbf{Q} \quad (7.14)$$

Với μ là hệ số dẻo không âm.

Điều kiện để ma trận nghịch đảo Θ^{-1} là duy nhất hay không bị suy biến thì ma trận Θ phải là ma trận xác định dương hay bán xác định dương. Trong những trường hợp này, ứng suất trên mặt chảy dẻo tương ứng với bất kỳ biến dạng $\boldsymbol{\epsilon}$ nào đều có thể xác định theo công thức

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{2\mu} \Theta^{-1} \boldsymbol{\epsilon} - \frac{1}{2} \Theta^{-1} \mathbf{Q} \quad (7.15)$$

Thế vào ứng suất được xác định bởi công thức (7.15) vào điều kiện chảy dẻo (7.5), hệ số dẻo μ có thể thu được như sau

$$\mu = \sqrt{\frac{\boldsymbol{\epsilon}^T \Theta^{-1} \boldsymbol{\epsilon}}{4 + \mathbf{Q}^T \Theta^{-1} \mathbf{Q}}} \quad (7.16)$$

Cuối cùng, năng lượng tiêu tán dẻo của vật liệu bất đẳng hướng có thể biểu diễn dưới dạng hàm của biến dạng dẻo như sau

$$\mathcal{D}(\boldsymbol{\epsilon}) = \sqrt{\left(1 + \frac{1}{4} \mathbf{Q}^T \Theta^{-1} \mathbf{Q}\right) \boldsymbol{\epsilon}^T \Theta^{-1} \boldsymbol{\epsilon} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon}^T \Theta^{-1} \mathbf{Q}} \quad (7.17)$$

7.3 Phân tích giới hạn kết cấu vi mô tiêu chuẩn Tsai-Wu

Trường động học hay lý thuyết cận trên dựa vào công của một trường động học khả dĩ thoả mãn điều kiện biên động học và luật chảy dẻo kết hợp. Với giả thiết biến dạng nhỏ, bài toán phân tích giới hạn được phát biểu rằng một cận trên của tải trọng thực có thể được tính toán bằng việc cực tiểu hoá công của năng lượng tiêu tán dẻo thoả điều kiện chuẩn hoá về công ngoại lực trên một trường chuyển vị khả dĩ động. Xem xét một miền thể tích \mathcal{D} bao gồm điều kiện biên động học $\partial\mathcal{D}_u$ và điều kiện biên tĩnh học $\partial\mathcal{D}_s$, và chịu ngoại lực tác dụng $\lambda \mathbf{q}$, lý thuyết động học có thể triển khai dưới dạng toán học như sau

$$\lambda \int_{\partial\mathcal{D}_s} \mathbf{q}^T \mathbf{u} dS \leq \int_{\mathcal{D}} \mathcal{D}(\boldsymbol{\epsilon}) dA \quad (7.18)$$

Với \mathbf{u} là trường chuyển vị khả dĩ động, và điều kiện tương thích giữa biến dạng và chuyển vị theo $\boldsymbol{\epsilon} = \nabla \mathbf{u}$, trong đó ∇ là công thức đạo hàm tuyến tính.

Dựa theo các phân tích trước, phương pháp cận trên của tải trọng sụp đổ thật của kết cấu có thể xác định bằng việc giải phương trình tối ưu hoá cực tiểu năng

lượng tiêu tán dẻo như sau

$$\lambda^+ = \min \int_{\mathcal{D}} \left[\sqrt{\left(1 + \frac{1}{4} \mathbf{Q}^T \boldsymbol{\Theta}^{-1} \mathbf{Q}\right) \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\Theta}^{-1} \boldsymbol{\epsilon} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\Theta}^{-1} \mathbf{Q}} \right] dA$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \int_{\partial \mathcal{D}_s} \mathbf{q}^T \mathbf{u} dS = 1 \\ \boldsymbol{\epsilon} = \nabla \mathbf{u} & \text{trong } \mathcal{D} \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{trên } \partial \mathcal{D}_u \end{cases} \quad (7.19)$$

7.4 Khai triển bài toán tối ưu hoá ràng buộc nón

Xem xét một vật liệu hỗn hợp, mà tất cả thành phần của nó đều cứng dẻo lý tưởng và tuân theo tiêu chuẩn dẻo dị hướng. Thuộc tính hữu hiệu của một hỗn hợp có thể được xác định bằng việc giải một bài toán phụ cụ thể được xây dựng cho vật liệu vi mô RVE tuần hoàn, mà có kể đến sự kết nối giữa hai cấp độ (vi mô và vĩ mô). Cùng xem xét trường chuyển vị tổng (và biến dạng tương ứng) làm biến của bài toán, thì bài toán phân tích giới hạn cho kết cấu vi mô được đồng nhất hoá theo phương pháp động học của vật liệu bất đẳng hướng tuân theo tiêu chuẩn chảy dẻo TSai-Wu được thể hiện như sau

$$\lambda^+ = \min \int_{\mathcal{D}} \left[\sqrt{\left(1 + \frac{1}{4} \mathbf{Q}^T \boldsymbol{\Theta}^{-1} \mathbf{Q}\right) \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\Theta}^{-1} \boldsymbol{\epsilon} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\Theta}^{-1} \mathbf{Q}} \right] dA \quad (7.20a)$$

$$\text{s.t.} \quad \boldsymbol{\Sigma}^T \mathbf{E} = 1 \quad (7.20b)$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = \nabla \mathbf{u} \text{ trong } \mathcal{D} \quad (7.20c)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) - \mathbf{E} \cdot \mathbf{x} \text{ tuần hoàn trên } \partial \mathcal{D}_u \quad (7.20d)$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{|\mathcal{A}|} \int_{\mathcal{D}} \boldsymbol{\epsilon} dA \quad (7.20e)$$

Sử dụng xấp xỉ trường chuyển vị và biến dạng, dạng rời rạc hoá của bài toán (7.20) có thể phát biểu

$$\lambda^+ = \min \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_g} \xi_i \sqrt{\left(1 + \frac{1}{4} \mathbf{Q}^T \boldsymbol{\Theta}^{-1} \mathbf{Q}\right) (\mathbf{B}_i \mathbf{d})^T \boldsymbol{\Theta}^{-1} \mathbf{B}_i \mathbf{d} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\Theta}^{-1} \mathbf{Q} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_g} \xi_i \mathbf{B}_i \mathbf{d}} \quad (7.21a)$$

$$\text{s.t.} \quad \boldsymbol{\Sigma}^T \mathbf{E} = 1 \quad (7.21b)$$

$$\mathbf{C} \mathbf{d} = 0 \quad (7.21c)$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{|\Omega|} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_g} \xi_i \mathbf{B}_i \mathbf{d} \quad (7.21d)$$

Bài toán thiết kế dẽo kết cấu vi mô (7.21) là bài toán tối ưu với ràng buộc phi tuyến. Hàm mục tiêu có thể chuyển về dưới dạng tổng các bình phương như sau

$$\mathcal{D}^{FEM} = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_g} \xi_i \left\| \sqrt{\left(1 + \frac{1}{4} \mathbf{Q}^T \boldsymbol{\Theta}^{-1} \mathbf{Q}\right) \mathbf{S}^T \mathbf{B}_i \mathbf{d}} \right\| - \frac{1}{2} \boldsymbol{\Theta}^{-1} \mathbf{Q} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_g} \xi_i \mathbf{B}_i \mathbf{d} \quad (7.22)$$

Với $\|\cdot\|$ là dạng căn của tổng các bình phương mà xuất hiện trong hàm tiêu tán năng lượng, cụ thể là $\|\mathbf{v}\| = (\mathbf{v}^T \mathbf{v})^{1/2}$, and \mathbf{S} được gọi là hệ số Cholesky của $\boldsymbol{\Theta}^{-1}$. Việc xác định véc tơ của các biến thêm \mathbf{r}_i

$$\mathbf{r}_i = \sqrt{\left(1 + \frac{1}{4} \mathbf{Q}^T \boldsymbol{\Theta}^{-1} \mathbf{Q}\right) \mathbf{S}^T \mathbf{B}_i \mathbf{d}} \quad (7.23)$$

và các biến phụ $t_1, t_2, \dots, t_{\mathcal{N}_g}$, bài toán tối ưu hoá (7.21) có thể đưa về dạng tối ưu hoá với ràng buộc nón bậc hai như sau

$$\lambda^+ = \min \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_g} \xi_i t_i - \frac{1}{2} \boldsymbol{\Theta}^{-1} \mathbf{Q} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_g} \xi_i \mathbf{B}_i \mathbf{d} \quad (7.24a)$$

$$\text{s.t} \quad \boldsymbol{\Sigma}^T \mathbf{E} = 1 \quad (7.24b)$$

$$\mathbf{C} \mathbf{d} = 0 \quad (7.24c)$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{|A|} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_g} \xi_i \mathbf{B}_i \mathbf{d} \quad (7.24d)$$

$$\|\mathbf{r}_i\| \leq t_i, \quad i = 1, 2, \dots, \mathcal{N}_g \quad (7.24e)$$

Với tập hợp các điểm ứng suất tiêu chuẩn của cấp độ vĩ mô $\boldsymbol{\Sigma}_0$, hệ số tải trọng giới hạn λ^+ có thể thu được bằng việc giải bài toán tối ưu hoá đã được rời rạc hoá như (7.24). Vì vậy, cường độ của một điểm vật liệu của cấp độ vĩ mô được xác định bởi công thức

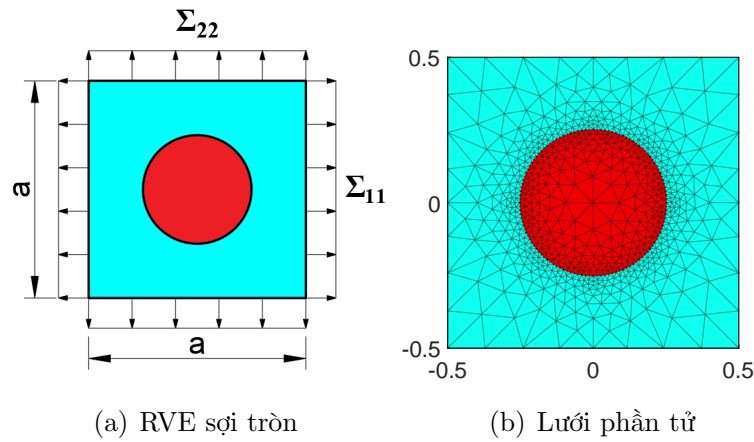
$$\boldsymbol{\Sigma}_Y = \lambda^+ \boldsymbol{\Sigma}_0 \quad (7.25)$$

7.5 Ví dụ số

Để chứng minh sự hiệu quả của phương pháp thiết kế dẽo cho vật liệu bất đẳng hướng của kết cấu vi mô tuần hoàn, các ví dụ so sánh với bài toán ứng suất phẳng. Trong đó, một vài kết quả được so sánh với với các nghiên cứu khác và đánh giá sự hiệu quả. Bài toán tối ưu hoá (7.24) được lập trình với ngôn ngữ Matlab và được giải bằng thuật toán đối ngẫu điểm nội hiệu quả, mosek[133]. Trong các ví dụ, phần tử đại diện hình vuông RVE có kích thước $a \times a$ ($a = 1$ mm) được sử dụng.

7.5.1 Hỗn hợp gia cường cốt sợi tròn

Trong ví dụ này, mẫu phần tử đại diện của vật liệu hỗn hợp gia cường sợi được xem xét. Hình học và lưới phần tử hữu hạn được thể hiện trên hình 7.1. Các thông số vật liệu được thể hiện theo bảng Ví dụ này được phát triển từ ví dụ kéo dọc trục của vật liệu kim loại gia cường cốt sợi, mà đã được thực hiện với nghiên cứu theo hướng thiết kế dẻo cho cấu trúc vi mô [49] để nghiên cứu sự ảnh hưởng bất đẳng hướng lên cường độ vĩ mô của vật liệu đồng nhất tương đương. Ứng xử dẻo của sợi gia cường tuân theo tiêu chuẩn đẳng hướng von Mises, trong đó các vật liệu nền là bất đẳng hướng sử dụng tiêu chuẩn TSai-Wu.

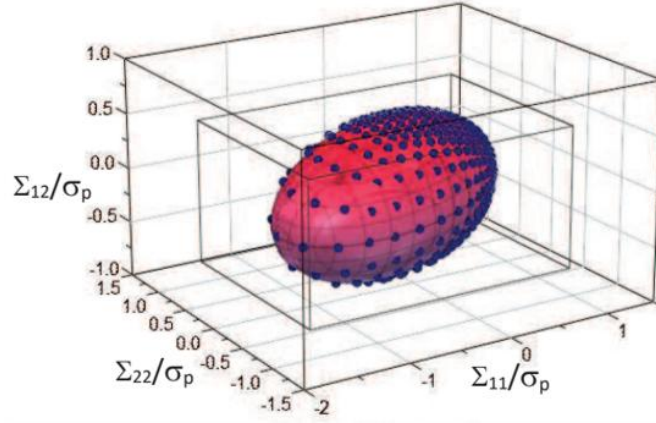


Hình 7.1: Hình học và lưới phần tử hữu hạn của vật liệu hỗn hợp gia cường sợi.

Giả thiết rằng mặt tiếp xúc giữa sợi gia cường và vật liệu nền là biên lý tưởng. Trong các mô phỏng số, tỉ lệ thể tích cốt sợi V_f được chọn là 0.2, và cường độ dẻo của cốt sợi được chọn là $\sigma_f = 20\sigma_p$, với σ_p là ứng suất chảy dẻo của vật liệu nền tham khảo. Mặt chảy dẻo của vật liệu hỗn hợp gia cường cốt sợi tròn dưới tác dụng của ba tải trọng độc lập $(\Sigma_{11}, \Sigma_{22}, \Sigma_{12})$ được thể hiện trong hình 7.2, với biên của miền giới hạn được chuẩn hoá bởi ứng suất dẻo của vật liệu nền. Chấm màu xanh thể hiện các giá trị giới hạn của phương pháp của luận văn này, trong khi đó các miền màu đỏ thể hiện mặt dẻo được tối ưu hoá sai số thống kê. Dựa vào miền giới hạn vật liệu vi mô, tiêu chuẩn chảy dẻo hữu hiệu được xác định bằng việc xác định các hệ số hữu hiệu của ma trận vật liệu theo tuân chuẩn dẻo đã biết. Giả thiết rằng mặt chảy dẻo vật liệu vĩ mô của hỗn hợp gia cường cốt sợi được thể hiện dưới dạng của tiêu chuẩn TSai trong điều kiện ứng suất phẳng

$$\Psi_T = P_1 \Sigma_{11}^2 + P_2 \Sigma_{22}^2 + P_3 \Sigma_{11} \Sigma_{22} + P_4 \Sigma_{12}^2 + Q_1 \Sigma_{11} + Q_2 \Sigma_{22} - 1 = 0 \quad (7.26)$$

Với phương pháp bình phương cực tiểu, các hệ số a_i and b_i có thể được ước lượng



Hình 7.2: Miền cường độ hữu hiệu của vật liệu hỗn hợp gia cường cốt sợi tròn.

số, và tiêu chuẩn dẻo hữu hiệu có thể được thể hiện như sau

$$\Psi_T = 0.493 \Sigma_{11} + 0.508 \Sigma_{22} + 0.952 \Sigma_{11}^2 + 1.9 \Sigma_{22}^2 - 1.366 \Sigma_{11} \Sigma_{22} + 2.925 \Sigma_{12}^2 - 1 \quad (7.27)$$

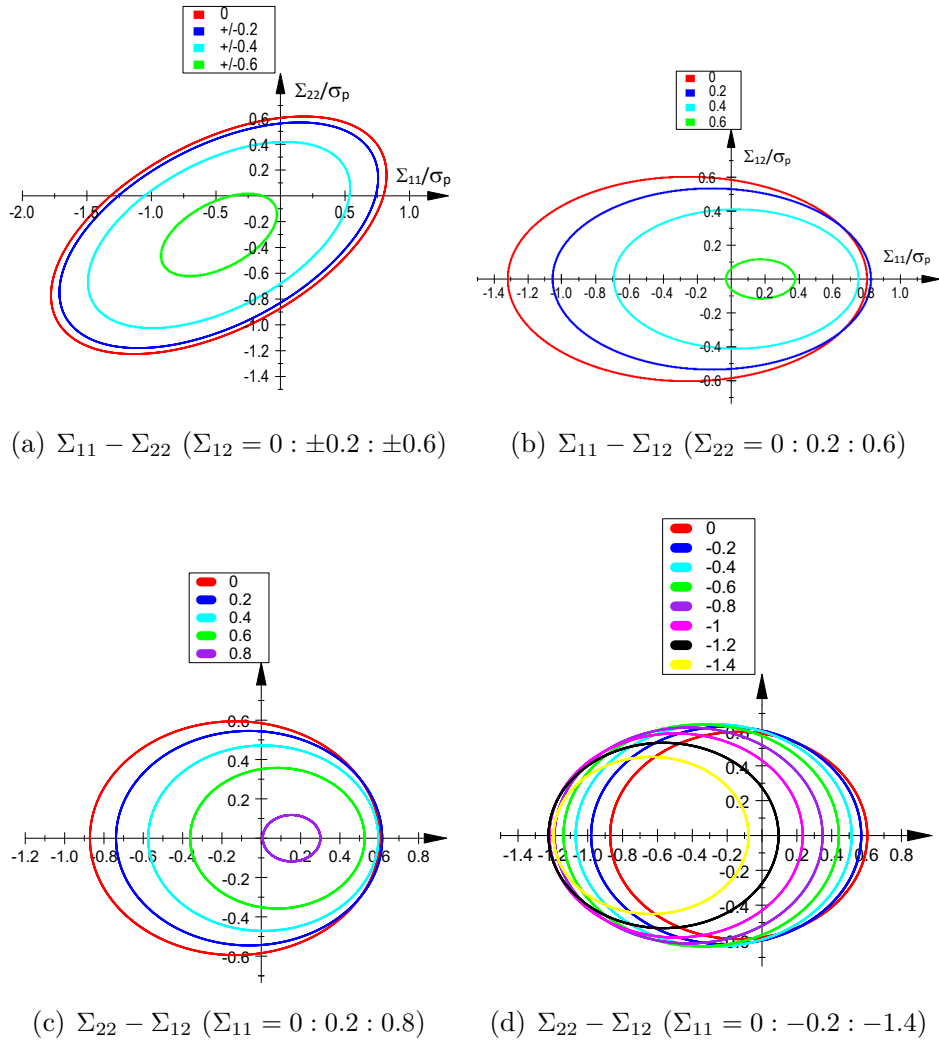
Hình 7.3 thể hiện mặt dẻo hữu hiệu trong dạng các mặt cắt đồng mức của ứng suất hằng số chuẩn hoá như là $\Sigma_{12} = -0.6 : 0.2 : 0.6$, $\Sigma_{22} = 0 : 0.2 : 0.6$ và $\Sigma_{11} = -1.4 : 0.2 : 0.8$.

Vật liệu hỗn hợp gia cường sợi tròn dưới tác dụng của ứng suất chính ($\Sigma_{12} = 0$) được xem xét. Miền tải trọng giới hạn của cấu trúc vi mô hay cường độ hữu hiệu của cấp độ vĩ mô được thể hiện trong hình 7.4. Biên giới hạn thể hiện sự tương đồng của nghiên cứu với kết quả của Li [49]. Có thể thấy rằng đường cong hiệu chỉnh tương đồng với vật liệu nền (đường màu xanh lá). Điều này có nghĩa cường độ vật liệu vĩ mô hữu hiệu của hỗn hợp bị ảnh hưởng chính bởi vật liệu yếu hơn như vật liệu nền.

Để nghiên cứu sự ảnh hưởng của ứng xử dẻo của vật liệu đến tiêu chuẩn dẻo, vật liệu nền theo Hill và tiêu chuẩn von Mises (trường hợp đặc biệt của Hill) được xem xét. Ma trận vật liệu hữu hiệu được thể hiện

$$\mathbf{P}_M = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_H = \begin{bmatrix} 1 & -3/4 & 0 \\ -3/4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7.28)$$

Mặt dẻo hữu hiệu khi sử dụng hai vật liệu nền khác nhau được tối ưu với kỹ thuật

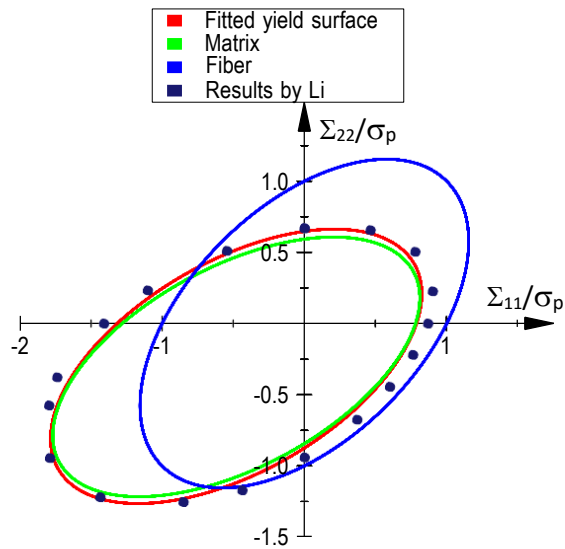


Hình 7.3: Mặt dẻo hữu hiệu cho vật liệu gia cường sợi tròn.

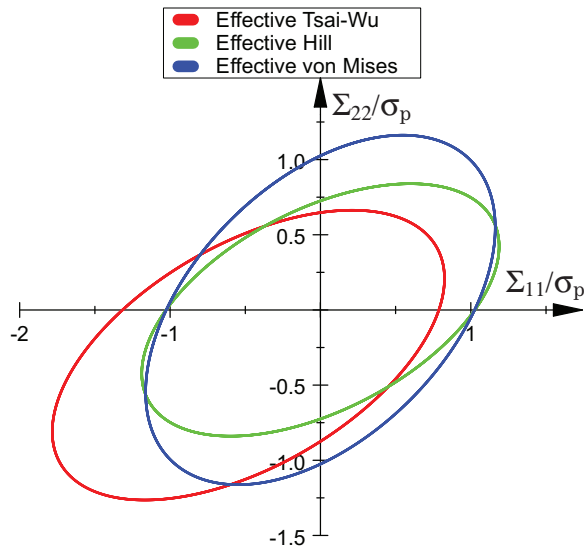
ình phương cực tiểu

$$\begin{aligned} \Psi_M &= 0.9511 \Sigma_{11}^2 + 0.9512 \Sigma_{22}^2 - 0.8966 \Sigma_{11} \Sigma_{22} + 2.8977 \Sigma_{12}^2 - 1 \\ \Psi_H &= 0.9487 \Sigma_{11}^2 + 1.9008 \Sigma_{22}^2 - 1.3528 \Sigma_{11} \Sigma_{22} + 2.9132 \Sigma_{12}^2 - 1 \end{aligned} \quad (7.29)$$

Với vật liệu nền theo tiêu chuẩn von Mises, hệ số $P_1 = P_2$ thể hiện tính đẳng hướng của hai phương vật liệu. Bên cạnh đó, vật liệu nền theo tiêu chuẩn Hill, hệ số $a_1 \neq a_2$ thể hiện sự bất đẳng hướng của vật liệu. Ba tiêu chuẩn dẻo hữu hiệu được thể hiện trong mặt phẳng của Σ_{11}/σ_p và Σ_{22}/σ_p như hình 7.5. Cơ cấu phá hoại của vật liệu hỗn hợp gia cường cốt sợi tròn cho các trường hợp vật liệu nền khác nhau được thể hiện trong hình 7.6. Qua đó, phân bố năng lượng tiêu tán tập trung ở vật liệu nền và quanh vùng tiếp xúc của hai pha vật liệu. Ảnh hưởng của thể tích cốt sợi lên mặt dẻo hữu hiệu của ba trường hợp, như là hình 7.7(a) (vật liệu nền

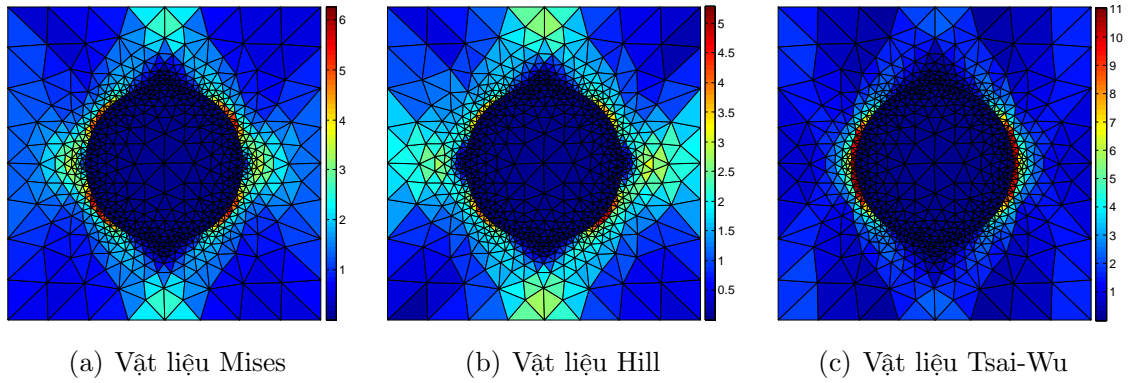


Hình 7.4: Mặt dẻo hữu hiệu của vật liệu gia cường cốt sợi tròn

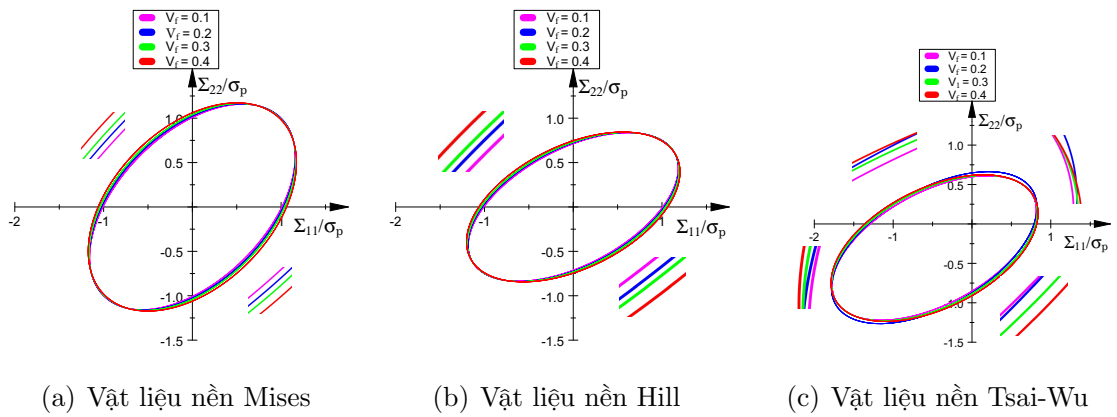


Hình 7.5: Mặt dẻo hữu hiệu khi vật liệu theo các tiêu chuẩn khác nhau.

von Mises), 7.7(b) (vật liệu nền Hill) và 7.7(c) (vật liệu nền Tsai-Wu). Với vật liệu nền Mises, kích thước của mặt dẻo tăng khi thể tích cốt sợi gia cường tăng, và thể hiện rõ ở hai góc một phần tư $(-\Sigma_{11}, \Sigma_{22})$ và $(\Sigma_{11}, -\Sigma_{22})$. Kết quả mặt chảy dẻo hữu hiệu tương tự cho trường hợp vật liệu nền Hill. Tuy nhiên, ứng xử dẻo của vật liệu theo tiêu chuẩn Tsai có sự khác biệt đối với trường hợp Hill và Mises. Khi thể tích cốt sợi tăng dần, một phần của mặt dẻo hữu hiệu tăng lên và một phần còn lại giảm đi như hình 7.7(c).



Hình 7.6: Cơ cấu phá hoại của vật liệu hỗn hợp gia cường cốt sợi: tải đơn trục.



Hình 7.7: Ảnh hưởng thể tích cốt sợi lên mặt chảy dẻo hữu hiệu: Mises, Hill và Tsai.

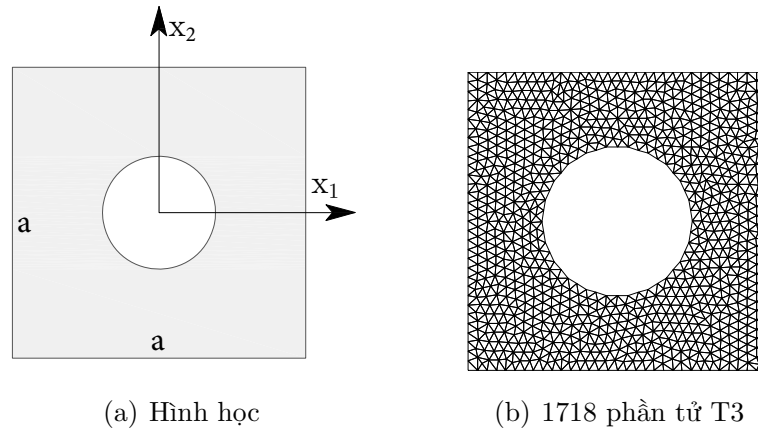
7.5.2 Vật liệu có lỗ rỗng tròn

Ví dụ này xem xét vật liệu có lỗ rỗng tuần hoàn với điều kiện ứng suất phẳng. Vật liệu có lỗ tròn tại giữa tấm, được thể hiện ở hình 7.8, được xem xét. Ứng xử dẻo của vật liệu nền là cứng dẻo lý tưởng và tuân theo tiêu chuẩn Tsai-Wu cùng với ví dụ trước.

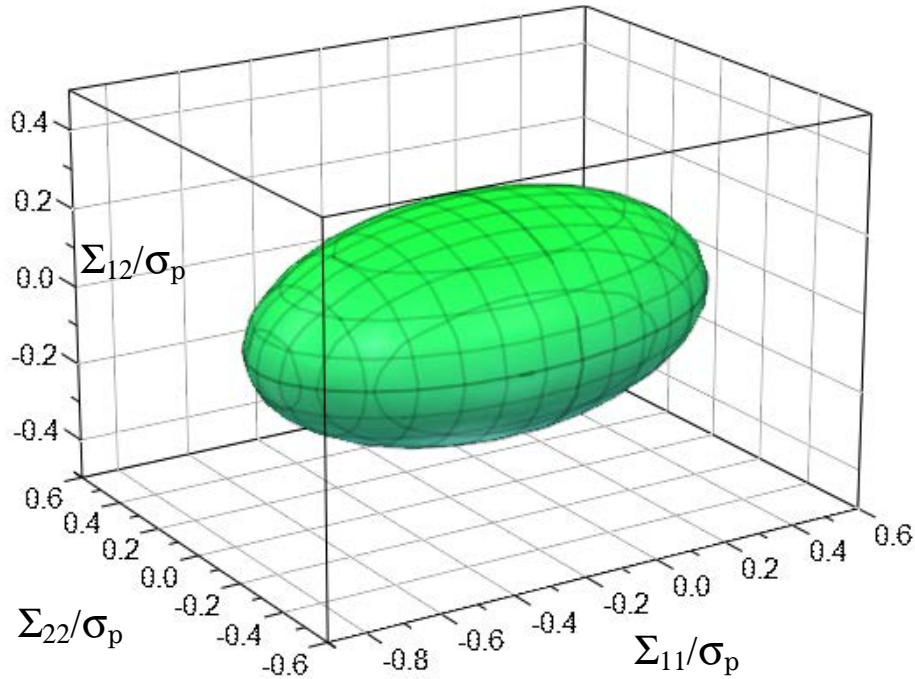
Mặt dẻo của vật liệu vi mô khoét lỗ tuân theo tiêu chuẩn dẻo Tsai-Wu được thể hiện trong không gian 3D $(\Sigma_{11}, \Sigma_{22}, \Sigma_{12})$ trong hình 7.9. Mặt dẻo hữu hiệu của vật liệu Tsai-Wu có lỗ rỗng được thể hiện qua công thức (7.30)

$$\Psi_T^{0,2} = 2.614 \Sigma_{11}^2 + 6.618 \Sigma_{22}^2 - 1.72 \Sigma_{11} \Sigma_{22} + 14.460 \Sigma_{12}^2 + 0.707 \Sigma_{11} + 0.992 \Sigma_{22} - 1 \quad (7.30)$$

Các mặt cắt của mặt dẻo hữu hiệu của mặt dẻo tối ưu của vật liệu tiêu chuẩn Tsai-Wu bị khoét lỗ tuần hoàn được thể hiện trong hình 7.10.



Hình 7.8: Phần tử đại diện của vật liệu có lỗ tuần hoàn với thể tích lỗ rỗng $V_f = 0.2$.



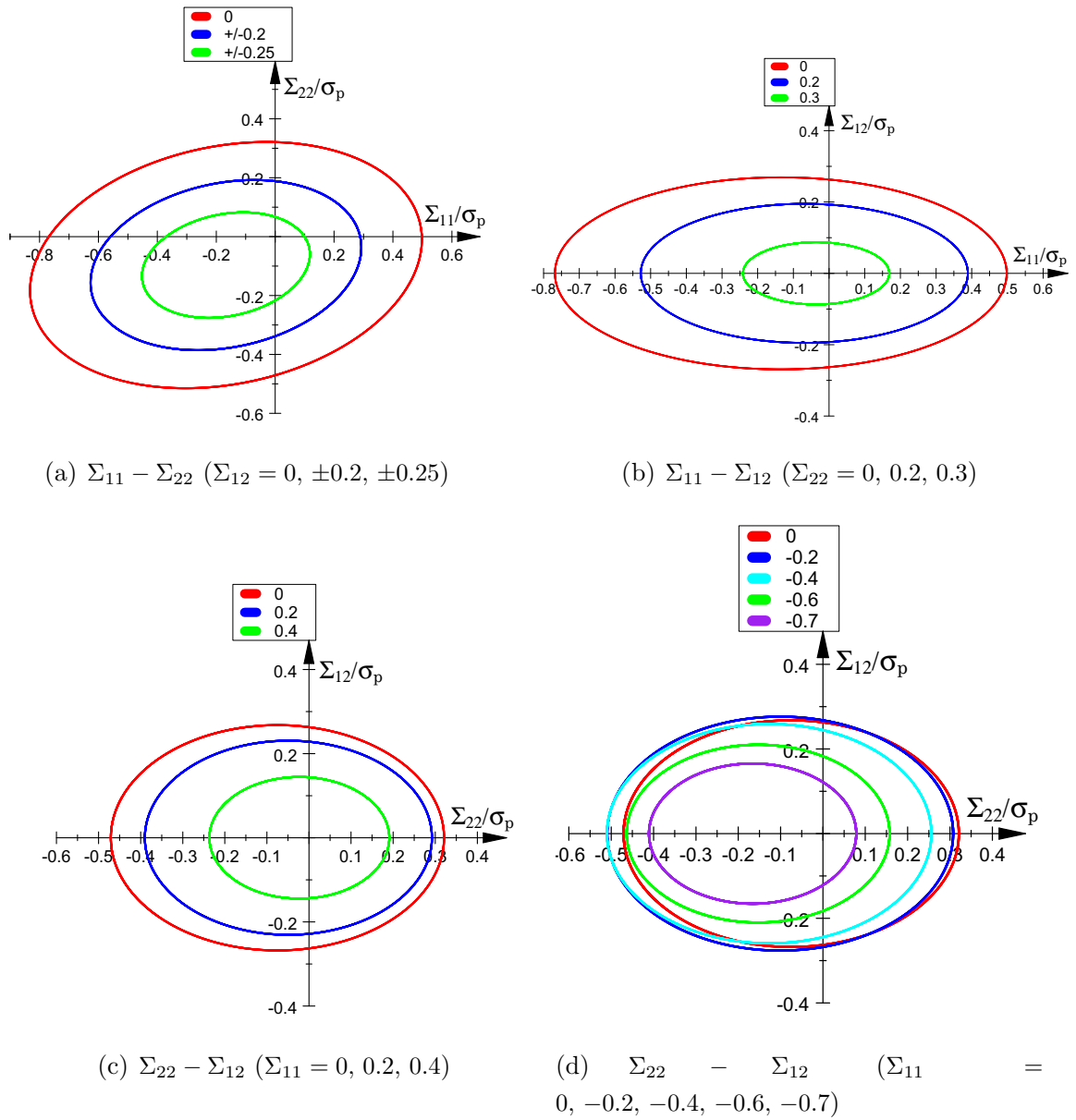
Hình 7.9: Mặt dẻo hữu hiệu của vật liệu Tsai-Wu có lỗ rỗng tròn tuần hoàn

Mặt dẻo hữu hiệu khi sử dụng vật liệu nền Mises và Hill cho vật liệu vi mô khoét lỗ tuần hoàn có thể thu được bởi công thức sau

$$\Psi_M^{0.2} = 2.9382 \Sigma_{11}^2 + 2.9364 \Sigma_{22}^2 - 0.9956 \Sigma_{11} \Sigma_{22} + 13.1446 \Sigma_{12}^2 - 1 \quad (7.31a)$$

$$\Psi_H^{0.2} = 2.5739 \Sigma_{11}^2 + 6.5542 \Sigma_{22}^2 - 1.2937 \Sigma_{11} \Sigma_{22} + 14.2018 \Sigma_{12}^2 - 1 \quad (7.31b)$$

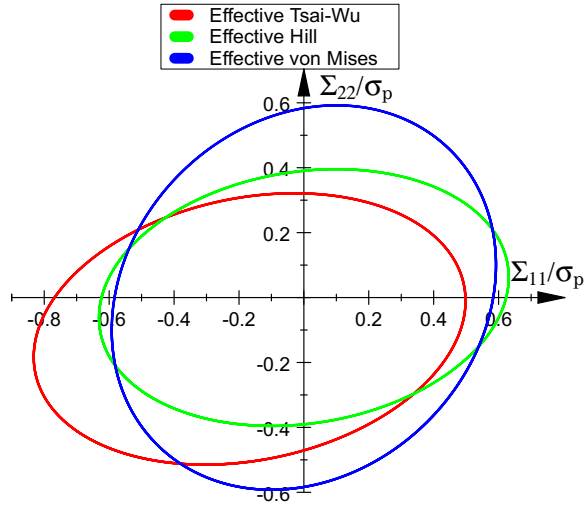
Ba tiêu chuẩn chảy dẻo hữu hiệu cho vật liệu vi mô khoét lỗ tuần hoàn với vật liệu Mises, Hill và Tsai-Wu được thể hiện trong hình 7.11. Đối với vật liệu đẳng hướng sử dụng tiêu chuẩn dẻo von Mises, giá trị độ lớn của khả năng chịu kéo và nén theo



Hình 7.10: Các mặt cắt của mặt dẻo tối ưu cho vật liệu Tsai-Wu có lỗ tuần hoàn.

hai phương tương đương nhau ($|\Sigma_{11}^{\text{Max}}| = |\Sigma_{11}^{\text{Min}}| = |\Sigma_{22}^{\text{Max}}| = |\Sigma_{22}^{\text{Min}}|$). Đối với vật liệu bất đẳng hướng sử dụng tiêu chuẩn Hill, khả năng chịu kéo và nén theo mỗi phương bằng nhau nhưng hai phương lại khác nhau ($|\Sigma_{11}^{\text{Max}}| = |\Sigma_{11}^{\text{Min}}| \neq |\Sigma_{22}^{\text{Max}}| = |\Sigma_{22}^{\text{Min}}|$). Đối với vật liệu bất đẳng hướng nhưng không trùng với hướng chính của vật liệu sử dụng tiêu chuẩn Tsai, cường độ chịu kéo và nén của mỗi phương khác nhau và hai phương cũng khác nhau ($|\Sigma_{11}^{\text{Max}}| \neq |\Sigma_{11}^{\text{Min}}| \neq |\Sigma_{22}^{\text{Max}}| \neq |\Sigma_{22}^{\text{Min}}|$). Qua đó, sự khác biệt của ba tiêu chuẩn dẻo (von Mises, Hill và Tsai-Wu) được thể hiện rõ.

Tiêu chuẩn Gurson [25], bao gồm lý thuyết đồng nhất hoá và tiếp cận động học



Hình 7.11: Mặt dẻo hữu hiệu vật liệu có lỗ với vật liệu nền Mises, Hill và Tsai.

của thiết kế dẻo cho vật rắn có lỗ hình cầu với vật liệu nền tuân theo ứng xử cứng dẻo lý tưởng và tiêu chuẩn von Mises, được thể hiện như sau

$$\frac{\Sigma_{\text{eqv}}^2}{3k^2} + 2V_f \cosh\left(\frac{\sqrt{3}\Sigma_m}{2k}\right) - 1 - V_f^2 = 0 \quad (7.32)$$

Với V_f là thể tích lỗ rỗng của vật liệu và k là ứng suất chảy khi cắt hoặc cố kết Σ_{eqv} là ứng suất tổng Σ_m là ứng suất trung bình của cấp độ vĩ mô.

Richmond và Smelser [134], cũng đề xuất dạng hiệu chỉnh của tiêu chuẩn dẻo của Gurson, với một hệ số điều chỉnh của thể tích lỗ rỗng (với $m=2/3$)

$$\Psi_{RS} = \frac{\Sigma_{\text{eqv}}^2}{3k^2} + 2V_f^m \cosh\left(\frac{\sqrt{3}\Sigma_m}{2k}\right) - 1 - V_f^{2m} = 0 \quad (7.33)$$

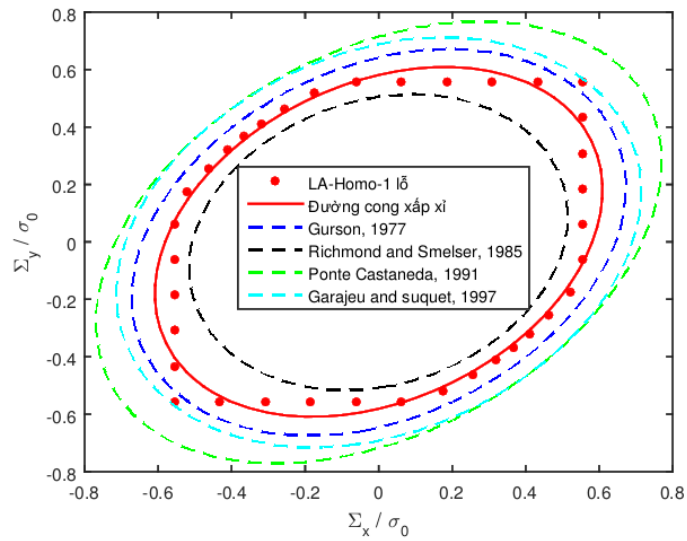
Ponte Castaneda [135] đã đề xuất hàm dẻo cho vật liệu có lỗ rỗng như sau

$$\Psi_{PC} = \left(1 + \frac{2}{3}V_f\right) \frac{\Sigma_{\text{eqv}}^2}{\sigma_0^2} + \frac{9}{4}V_f \frac{\Sigma_m^2}{\sigma_0^2} - (1 - V_f)^2 = 0 \quad (7.34)$$

Garajeu và Suquet [136] đã đề xuất tiêu chuẩn dẻo hiệu chỉnh

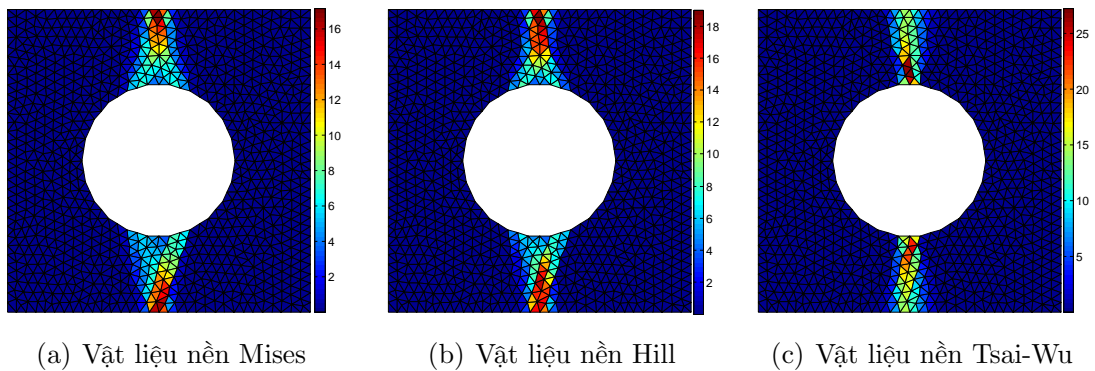
$$\Psi_{GS} = \left(1 + \frac{2}{3}V_f\right) \frac{\Sigma_{\text{eqv}}^2}{\sigma_0^2} + 2V_f \cosh\left(\frac{3}{2} \frac{\Sigma_m}{\sigma_0}\right) - 1 - V_f^2 = 0 \quad (7.35)$$

So sánh giữa tiêu chuẩn Tsai-Wu và các tiêu chuẩn hiệu chỉnh của Gurson [25, 134–136], cho vật liệu có lỗ rỗng được thể hiện trong hình 7.12.



Hình 7.12: Miền cường độ hữu hiệu của vật liệu có lỗ tròn với $V_f=0.2$

Cơ cấu phá hoại của vật liệu hỗn hợp cốt sợi gia cường tại trạng thái giới hạn của bài toán kéo dọc trực được thể hiện trong hình 7.13. Qua đó, vật liệu vi mô bị khoét lỗ có xu hướng tạo thành các đường thẳng đi qua lỗ rỗng. Đối với vật liệu Mises và vật liệu Hill, miền phân bố năng lượng tiêu tán mở rộng từ mép lỗ rỗng và kéo dài đến biên của phần tử đại diện. Đối với vật liệu Tsai-Wu, có cùng xu hướng tuy nhiên phân bố tập trung hơn.

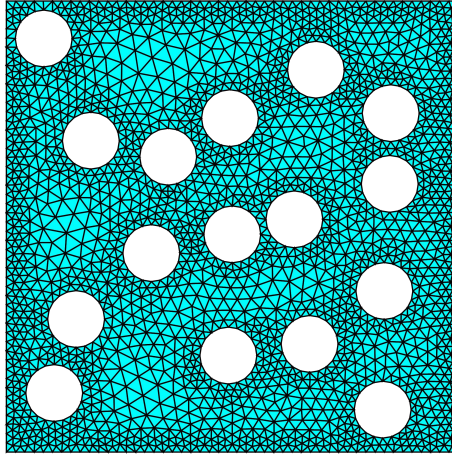


Hình 7.13: Cơ cấu phá hoại trong vật liệu vi mô có lỗ tròn: tải dọc trực.

7.5.3 Vật liệu lỗ rỗng ngẫu nhiên

Ví dụ số này nghiên cứu một phần tử đại diện RVE với phân bố ngẫu nhiên lỗ rỗng nhằm xác định miền cường độ vật liệu hữu hiệu cho vật liệu. Mô phỏng số

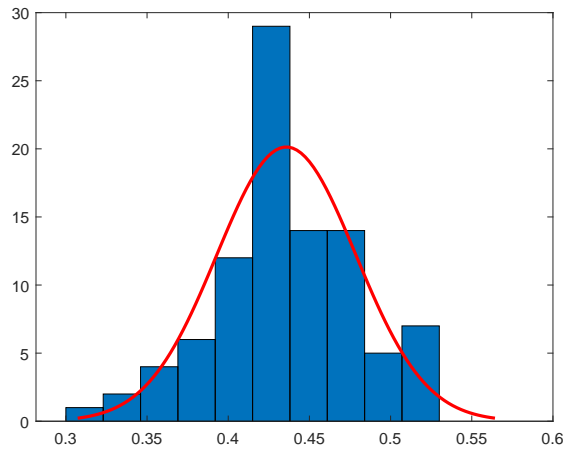
được thực hiện trên 100 mẫu vật liệu vi mô với lỗ rỗng có bán kính giống nhau $R = \sqrt{\frac{V_f}{n_c \times \pi}}$, $n_c = 16$. Mỗi mẫu phần tử đại diện RVE có cùng thể tích lỗ rỗng, $V_f = 0.2$, lưới phần tử của một mẫu phần tử đại diện RVE được thể hiện trong hình 7.14.



Hình 7.14: Lưới phần tử trong trường hợp phân bố ngẫu nhiên 16 lỗ và $V_f = 0.2$

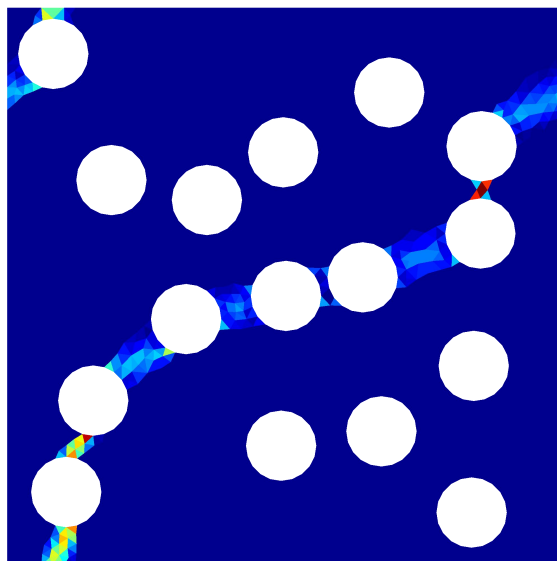
Kỹ thuật được sử dụng để tạo các lỗ rỗng ngẫu nhiên:

- + Chọn ngẫu nhiên tâm lỗ rỗng trong miền phần tử đại diện
- + Kiểm tra khoảng cách giữa các lỗ rỗng nhằm đảm bảo sự phân li các lỗ rỗng ($d < 2.2 \times R$).
- + Chọn số nút trên chu vi mỗi lỗ rỗng (nhằm đảm bảo sự chính xác hình học của lỗ rỗng).
- + Chọn số nút trên biên phần tử đại diện nhằm đảm bảo sự tuần hoàn về nút trên biên RVE.
- + Sử dụng phần mềm Mesh2d nhằm tạo hệ lưới phần tử T3.
- + Mỗi mẫu phần tử, thực hiện phân tích giới hạn kết cấu vi mô nhằm thu được ứng suất giới hạn vĩ mô.
- + Sau vòng lặp thứ 30, kiểm tra sai số tiêu chuẩn của thống kê các ứng suất giới hạn vĩ mô.
- + Nếu sai số tiêu chuẩn của thống kê tập hợp các ứng suất giới hạn vĩ mô nhỏ hơn 0.02 thì kết thúc vòng lặp.



Hình 7.15: Phân bố của ứng suất vĩ mô giới hạn trong bài toán 16 lỗ và $V_f = 0.2$.

Qua đó, 100 mẫu mô hình phần tử đại diện RVE với thể tích lỗ rỗng cố cố định ($V_f = 0.2$). Sự phân bố của cường độ ứng suất vĩ mô được thể hiện trong hình 7.15. Giá trị chuẩn hoá của cường độ ứng suất vĩ mô đối với vật liệu có lỗ rỗng phân bố ngẫu nhiên từ 0.3 đến 0.525.



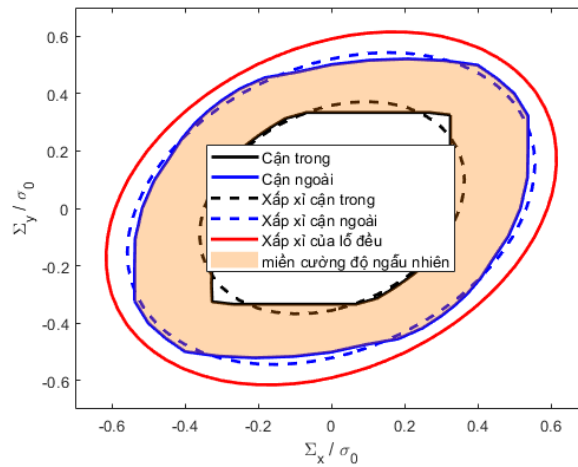
Hình 7.16: Năng lượng tiêu tán dẻo của RVE với lỗ rỗng ngẫu nhiên.

Phân bố năng lượng tiêu tán dẻo trong mẫu phần tử đại diện RVE với phân bố lỗ rỗng ngẫu nhiên được thể hiện trong hình 7.16. Cơ cấu phá hoại của kết cấu vi mô có xu hướng hình thành các đường thẳng kết nối các lỗ rỗng với nhau. Ngoài ra, sự phân bố ngẫu nhiên lỗ rỗng sẽ tạo điều kiện hình thành các cơ cấu phá hoại

đối với các lỗ gần biên hơn. Điều này làm giảm cường độ của vật liệu bị khoét lỗ ngẫu nhiên hơn so với trường hợp lỗ đều.

Nhìn chung, miền cường độ của trường hợp phân bố ngẫu nhiên nhỏ hơn khi so với trường hợp lỗ đều trong hình 7.17. Tập hợp các giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của mỗi bài toán phân tích giới hạn kết cấu vi mô được tìm thấy và tối ưu thành dạng tiêu chuẩn dẻo Tsai-Wu bằng phương pháp bình phương cực tiểu.

$$\begin{aligned}\Psi_{\text{ngoài}} &= 3.507 \Sigma_{11}^2 + 3.673 \Sigma_{22}^2 - 2.042 \Sigma_{11} \Sigma_{22} + 0.003 \Sigma_{11} + 0.002 \Sigma_{22} - 1 \\ \Psi_{\text{trong}} &= 8.174 \Sigma_{11}^2 + 7.800 \Sigma_{22}^2 - 4.165 \Sigma_{11} \Sigma_{22} - 0.026 \Sigma_{11} - 0.026 \Sigma_{22} - 1\end{aligned}\quad (7.36)$$



Hình 7.17: Miền cường độ của vật liệu có lỗ rỗng ngẫu nhiên và $V_f = 0.2$.

7.6 Kết luận thiết kế dẻo cho vật liệu theo tiêu chuẩn Tsai-Wu

Miền cường độ hữu hiệu cho các vật liệu khác nhau (vật liệu gia cường cốt sợi, vật liệu lỗ rỗng tuần hoàn và phân bố ngẫu nhiên lỗ rỗng) đã được trình bày bằng hướng tiếp cận đồng nhất hoá trong bài toán thiết kế dẻo. cường độ tại điểm vật liệu vĩ mô thu được thông qua bài toán phân tích giới hạn vi mô. Các kết quả đạt được tương đồng với kết quả lý thuyết và thực nghiệm của các tác giả khác. Đối với trường hợp phân tử đại diện tuần hoàn, hàm dẻo hữu hiệu được thể hiện dưới dạng tiêu chuẩn Tsai-Wu là kết quả tối ưu khi thực hiện kỹ thuật bình phương cực tiểu. Đối với trường hợp phân tử đại diện phân bố ngẫu nhiên, tập hợp giá trị ứng suất giới hạn được thống kê. Phương trình của biên trong và biên ngoài của miền phân bố ứng suất giới hạn được xác định bằng kỹ thuật bình phương cực tiểu.

Công bố liên quan đến thiết kế dẻo cho vật liệu theo tiêu chuẩn Tsai-Wu
Bài báo tạp chí quốc tế thuộc danh mục ISI

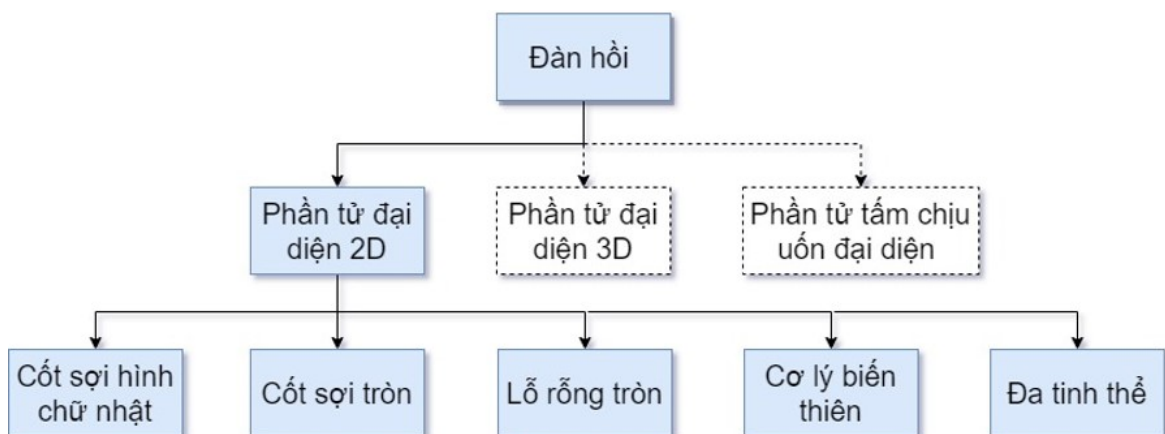
1. **P.H. Nguyen, C.V. Le.** "Yield design homogenization analysis of anisotropic materials with Tsai-Wu matrix". *International Journal of solids and structures*.. (đã nộp bản revised vào tháng 3 năm 2020)

Chương 8

Thảo luận

8.1 Bài toán đa tỉ lệ đàn hồi cho kết cấu tấm phẳng hai chiều

Bài toán đa tỉ lệ trong miền đàn hồi cho kết cấu tấm phẳng hai chiều đã được trình bày trong chương 3. Trường chuyển vị tổng (u, v) của vật liệu vi mô được rời rạc hóa qua các trường hợp như hình 8.1. Biến dạng từ một điểm vật liệu của bài toán vĩ mô $(\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{xy})$ được chuyển thành ràng buộc chuyển vị (u, v) trên biên phần tử đại diện hai chiều. Kỹ thuật đồng nhất hoá được sử dụng nhằm xác định ma trận hằng số vật liệu hữu hiệu trên trung bình thể tích phần tử đại diện tấm phẳng hai chiều. Các thông số mô đun đàn hồi hữu hiệu E_{eff} , mô đun kháng cắt hữu hiệu G_{eff} , mô đun đàn hồi khối hữu hiệu K_{eff} . Kết quả được tương đồng với các nghiên cứu về lý thuyết và mô phỏng số khác. Tuy nhiên, trường hợp vật liệu đa tinh thể thì có các giá trị nằm ngoài cận lý thuyết khi tỷ lệ giữa kích thước tinh thể và kích thước phần tử đại diện còn lớn. Các thông số đàn hồi tụ khi tỷ lệ này giảm dần.



Hình 8.1: Bài toán đa tỉ lệ trong miền đàn hồi cho kết cấu tấm phẳng hai chiều

8.1.1 Ưu điểm của phương pháp đa tỉ lệ tấm phẳng đàn hồi

- + Phương pháp đa tỉ lệ cho tấm phẳng đàn hồi có thể xác định nhanh chóng và chính xác các thông số đàn hồi hữu hiệu của kết cấu tấm phẳng hai chiều như qua các ví dụ đã được thực hiện ở chương
- + Phương pháp này có thể xét đến ảnh hưởng hình học của các pha vật liệu cũng như sự phân bố vật liệu trong cấu trúc vi mô.
- + Điều kiện biên tuần hoàn được đánh giá đáp ứng được gần với ứng xử thực tế của vật liệu.

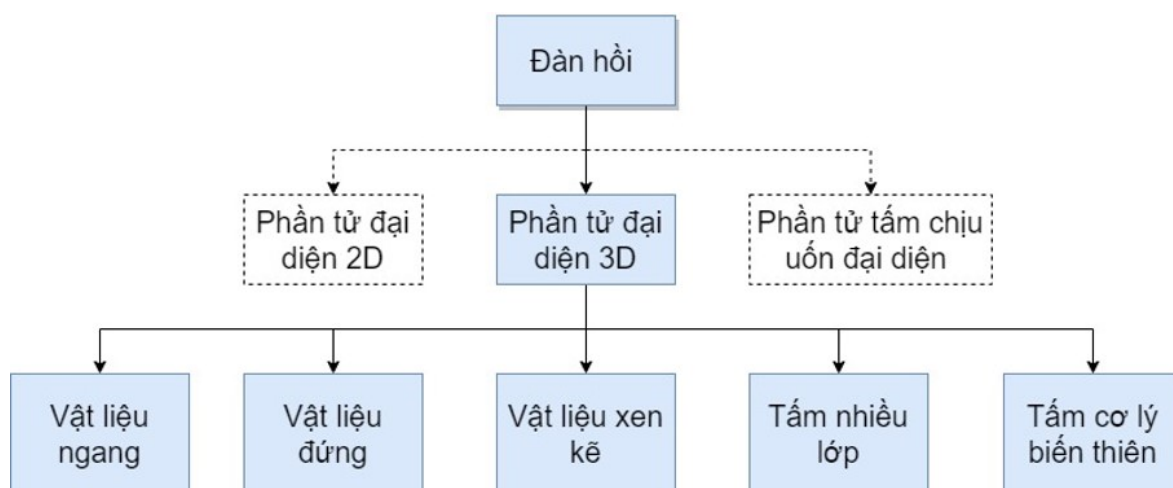
8.1.2 Hạn chế của phương pháp đa tỉ lệ tấm phẳng đàn hồi

- + Phương pháp này cần một hệ nút đối xứng trên hai cạnh đối diện nhau của phần tử đại diện. Điều này gặp khó khăn khi thực hiện các phần mềm chia lưới tự động mà kết cấu bên trong không đối xứng.
- + Phương pháp này đưa ra trực tiếp ma trận đàn hồi hữu hiệu cho kết cấu tấm phẳng. Khi so sánh với các nghiên cứu lý thuyết, cần các công thức để tính toán mô đun đàn hồi kháng trượt hữu hiệu, mô đun đàn hồi khối hữu hiệu, mô đun đàn hồi hữu hiệu E, hệ số nở hông hữu hiệu.
- + Phương pháp cần một kỹ thuật xử lý hình ảnh đối với các hình chụp của các máy quét đối với các mẫu thí nghiệm. Qua đó, một hệ lưới phần tử được xây dựng cho phân tích phần tử hữu hạn. Bên cạnh đó, một yêu cầu quan trọng là phân loại được các pha vật liệu khác nhau và thông số đàn hồi của các pha vật liệu này.
- + Hiện tượng tách lớp giữa các pha vật liệu chưa được kể đến trong nghiên cứu. Trong luận văn này, liên kết giữa các pha vật liệu khác nhau được xem như lý tưởng.
- + Vật liệu vi mô tấm phẳng hai chiều chỉ kể đến sự thay đổi vật liệu trong mặt phẳng tấm mà chưa kể đến được sự thay đổi vật liệu theo chiều dày tấm.

8.2 Bài toán đa tỉ lệ đàn hồi cho kết cấu 3D

Bài toán đa tỉ lệ với phần tử đại diện ba chiều đã được trình bày trong chương 4. Trường chuyển vị tổng (u, v, w) của kết cấu vi mô được mô hình và xấp xỉ với

các trường hợp được thể hiện trong hình 8.2 . Biến dạng $(\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, \epsilon_{xy}, \epsilon_{xz}, \epsilon_{yz}, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz})$ tại một điểm vật liệu của cấp độ vĩ mô được chuyển thành ràng buộc về chuyển vị (u, v, w) trên biên bài toán phần tử đại diện ba chiều. Kỹ thuật đồng nhất hóa được áp dụng để xác định ma trận vật liệu đàn hồi hữu hiệu cho vật liệu không đồng nhất. Kết quả được nằm trong khoảng ước lượng cận lý thuyết và tương đồng với mô phỏng số khác.



Hình 8.2: Bài toán đa tỉ lệ trong miền đàn hồi với phần tử đại diện ba chiều

8.2.1 Ưu điểm của phương pháp đa tỉ lệ kết cấu 3D

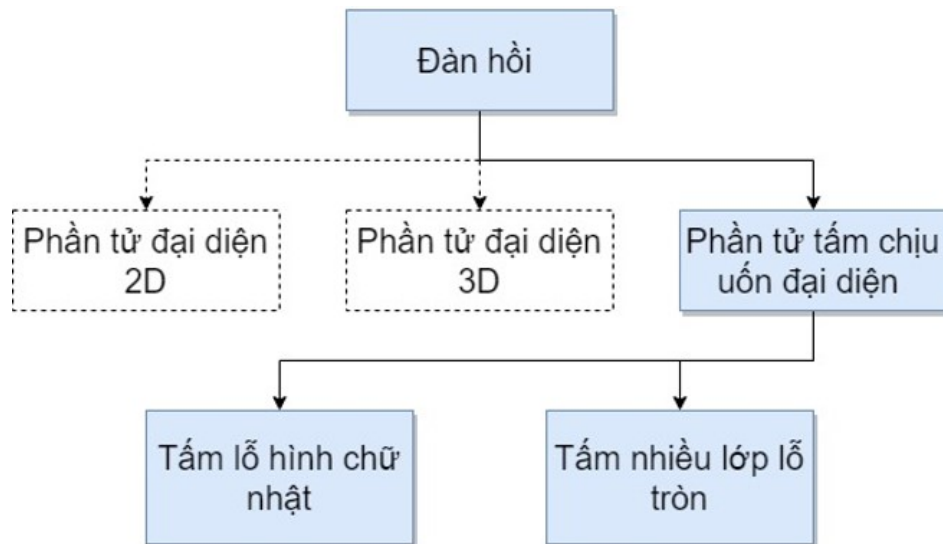
- + Mô tả chân thật sự phân bố các cốt liệu trong không gian ba chiều. Điều này giúp kết quả các thông số đặc trưng đàn hồi hữu hiệu hay ma trận vật liệu đàn hồi đạt được độ chính xác trong tính toán.
- + Phương pháp giúp giảm chi phí tính toán bài toán cấp độ vĩ mô khi chỉ lấy ma trận vật liệu hữu hiệu được trung bình hoá mô hình phần tử đại diện ba chiều đạt được độ phức tạp cần thiết.
- + Thông thường, các thông số mô đun đàn hồi hữu hiệu được xác định thông qua các thí nghiệm thực tế. Tuy nhiên, sự phân bố và sắp xếp trong các mẫu thí nghiệm là không giống nhau nên phải thực hiện rất nhiều mẫu và phải lấy trung bình thống kê. Tuy nhiên, trong quá trình thí nghiệm cũng có nhiều nhân tố ảnh hưởng của môi trường và sai số trong các phép đo. Qua đó, hướng tiếp cận này sẽ giúp giảm chi phí thí nghiệm trong Việc xác định thông số hữu hiệu theo hướng tiếp cận số.

8.2.2 Hạn chế của phương pháp đa tỉ lệ kết cấu 3D

- + Phương pháp cần một công cụ chia lưới hiệu quả nhằm đảm bảo sự chính xác của vị trí, kích thước và hình dạng của các pha vật liệu khác nhau
- + Phương pháp cần một kỹ thuật lưu biến đáp ứng với số lượng biến khổng lồ và thuật giải ma trận nhằm giảm thiểu chi phí tính toán.
- + Phương pháp cần một kỹ thuật lấy thông tin của các pha vật liệu và các thông số của vật liệu từ cấu trúc vi mô mà không phá hoại kết cấu.

8.3 Bài toán đa tỉ lệ đàn hồi cho kết cấu tấm chịu uốn

Bài toán đa tỉ lệ đàn hồi cho kết cấu tấm chịu uốn đã được trình bày trong chương 5. Biến dạng cong $(\kappa_{xx}, \kappa_{yy}, \kappa_{xy})$ từ điểm vật liệu bài toán vi mô được chuyển thành ràng buộc chuyển vị (w, θ_x, θ_y) trên biên phần tử đại diện tấm chịu uốn qua các trường hợp như hình 8.3. Kỹ thuật đồng nhất hóa được áp dụng nhằm xác định ma trận vật liệu đàn hồi hữu hiệu trung bình thể tích tấm chịu uốn vi mô. Các hằng số đàn hồi hữu hiệu của kết cấu vi mô được xác định như mô đun đàn hồi hữu hiệu E_{eff} , hệ số nở hông hữu hiệu ν_{eff} , mô đun kháng cắt hữu hiệu G_{eff} và mô đun đàn hồi khối hữu hiệu κ_{eff} . Qua đó, việc xây dựng các hàm số bậc hai để xác định các thông số đàn hồi hữu hiệu khi thể tích lỗ rỗng tăng dần.



Hình 8.3: Bài toán đa tỉ lệ trong miền đàn hồi cho kết cấu tấm chịu uốn

8.3.1 Ưu điểm của phương pháp đa tỉ lệ kết cấu tấm chịu uốn

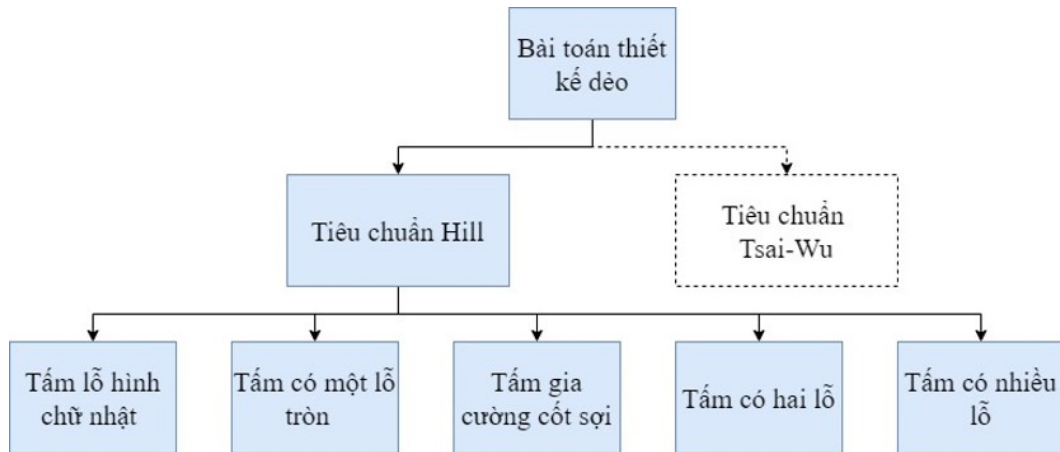
- + Phương pháp này đã thêm các điều kiện giảm số bậc tự do so với kết cấu phần tử đại diện ba chiều chịu uốn, nhưng vẫn đảm bảo độ chính xác về theo yêu cầu khi đưa các tính toán về mặt trung bình của tấm.
- + Phương pháp có thể được mở rộng cho các trường hợp tấm dày mindlin, tấm có biến dạng cắt bậc cao, tấm nhiều lớp, tấm vật liệu có cơ lý biến thiên hay vật liệu đa chức năng thông minh khi sử dụng các lý thuyết tấm tương ứng cho kết cấu tấm vi mô. Qua đó, sự thay đổi vật liệu trên bề mặt được trung bình hóa và cả sự thay đổi vật liệu theo chiều dày tấm cũng có thể được khảo sát.

8.3.2 Hạn chế của phương pháp đa tỉ lệ kết cấu tấm chịu uốn

- + Phương pháp cần kết hợp với các lý thuyết về tấm tương ứng để mở rộng khả năng tính toán đến các vật liệu khác nhau.
- + Phương pháp sẽ thực hiện đồng nhất trong mặt phẳng tấm và sự thay đổi vật liệu theo bề dày tấm tùy thuộc vào các lý thuyết tấm khác nhau được áp dụng một cách phù hợp.
- + Phương pháp cần một kỹ thuật lấy thông tin của các lớp vật liệu và các thông số của vật liệu từ cấu trúc vi mô mà không phá hoại kết cấu.

8.4 Miền cường độ hữu hiệu cho vật liệu tiêu chuẩn Hill

Tiêu chuẩn Hill được xây dựng một cách tổng quát cho vật liệu bất đẳng hướng nhưng đối xứng (cường độ chịu kéo và nén bằng nhau về độ lớn theo mỗi phương). Kỹ thuật đồng nhất hóa được tích hợp vào bài toán phân tích giới hạn cho phần tử đại diện ở cấp độ vi mô nhằm xác định được ứng suất giới hạn tại một điểm vật liệu của cấp độ vĩ mô. Bài toán phân tích giới hạn cho kết cấu vi mô được đưa về dạng bài toán tối ưu hóa với các ràng buộc nón bậc hai (second order cone programming -SOCP) và được giải bằng công cụ mosek bằng ngôn ngữ matlab. Tập hợp các giá trị ứng suất giới hạn này thể hiện miền cường độ của vật liệu hữu hiệu. Sau đó, kỹ thuật bình phương cực tiểu được áp dụng nhằm xác định các hệ số hữu hiệu cho hàm tiêu chuẩn dẻo của vật liệu vi mô. Tiêu chuẩn dẻo hữu hiệu này có thể được sử dụng cho bài toán phân tích giới hạn của kết cấu vĩ mô.



Hình 8.4: Bài toán thiết kế dèo cho vật liệu tiêu chuẩn Hill

8.4.1 Ưu điểm thiết kế dèo cho vật liệu tiêu chuẩn Hill

- + Hướng tiếp cận số với việc xấp xỉ trường chuyển vị tổng của kết cấu vi mô được thực hiện. Bài toán phân tích giới hạn cho phần tử đại diện vi mô được thêm vào hai ràng buộc là điều kiện biên tuần hoàn và biến dạng từ cấp độ vĩ mô bằng trung bình thể tích của phần tử đại diện.
- + Nghiên cứu đã áp dụng cho trường hợp vật liệu cốt sợi gia cường. Đây là cơ sở cho việc phát triển việc đánh giá cường độ vật liệu phức tạp hơn (bao gồm nhiều pha vật liệu xen kẽ nhau). Với mỗi miền phân bố vật liệu sẽ có một hàm dèo tương ứng của pha vật liệu đó.
- + Phương pháp phân tích giới hạn là được xây dựng trên nguyên lý Cân bằng năng lượng tiêu tán dèo và tổng công ngoại lực. Qua đó, giá trị tải trọng giới hạn của kết cấu vi mô hay ứng suất giới hạn của một điểm vật liệu vĩ mô được xác định trực tiếp từ kết quả bài toán tối ưu hóa.

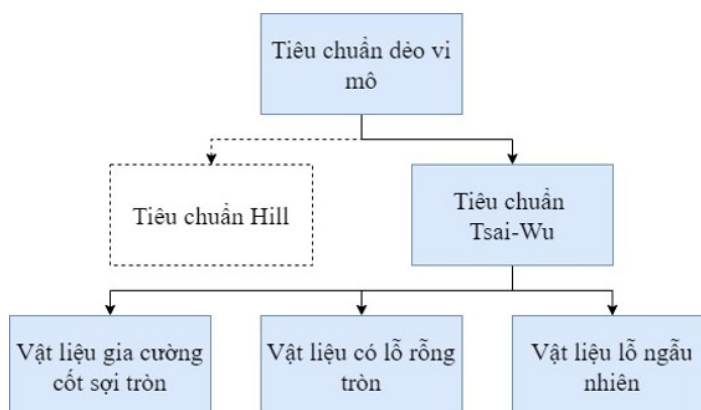
8.4.2 Hạn chế của thiết kế dèo cho vật liệu tiêu chuẩn Hill

- + Vật liệu nền tuân theo tiêu chuẩn Hill nhưng cấu trúc của cấp độ vi mô không đối xứng thì tiêu chuẩn dèo hữu hiệu của vật liệu cần xác định theo tiêu chuẩn Tsai-Wu.
- + Hình dạng của hàm chảy dèo hữu hiệu hay miền ứng suất giới hạn tại một điểm vật liệu vĩ mô phụ thuộc vào tính chất, hình dạng và sự phân bố của từng pha vật liệu cấu thành. Tuy nhiên để thuận lợi trong việc áp dụng luật

chảy dẻo kết hợp và xây dựng năng lượng tiêu tán dẻo chuyển về dạng hàm theo biến biến dạng. Hàm dẻo xấp xỉ cần phải trơn và liên tục. Kỹ thuật bình phương cực tiểu nhằm xác định các hệ số hữu hiệu về dạng tiêu chuẩn dẻo của Hill.

8.5 Miền cường độ hữu hiệu cho vật liệu tiêu chuẩn Tsai-Wu

Tiêu chuẩn Tsai-Wu được xây dựng một cách tổng quát cho vật liệu bất đẳng hướng và bất đối xứng (cường độ chịu kéo và nén theo hai phương khác nhau).



Hình 8.5: Bài toán thiết kế dẻo cho vật liệu theo tiêu chuẩn Tsai-Wu

8.5.1 Ưu điểm của thiết kế dẻo cho vật liệu tiêu chuẩn Tsai-Wu

- + Việc áp dụng phương pháp trực tiếp (phân tích giới hạn) vào bài toán vi mô giúp việc xác định nhanh chóng ứng suất giới hạn của một điểm vật liệu vĩ mô. Bên cạnh đó, cơ cấu phá hoại của cấu trúc vi mô được dự đoán theo sự phân bố tập trung của năng lượng tiêu tán dẻo. Đối với vật liệu có lỗ, xu hướng phá hoại thường hình thành các đường thẳng nối các lỗ gần nhau. Qua đó, cấu kiện có lỗ rỗng phân bố ngẫu nhiên sẽ dễ hình thành cơ cấu phá hoại hơn vật liệu có lỗ tuần hoàn. Do đó, hàm dẻo hữu hiệu của vật liệu có lỗ ngẫu nhiên sẽ nhỏ hơn khi xem xét vật liệu có lỗ đều. Điều này giúp việc dự đoán tải trọng phá hoại của các công trình sẽ đạt gần với thực tế hơn.
- + Điều kiện biên tuần hoàn có thể áp đặt trực tiếp thành ràng buộc các chuyển vị trong bài toán tối ưu hóa.

- + Bài toán tối ưu hóa được chuyển về dạng ràng buộc nón bậc hai và được giải bằng công cụ mosek giúp giảm thời gian tính toán một cách hiệu quả khi so với các phương pháp tối ưu hóa với ràng buộc phi tuyến khác.

8.5.2 Hạn chế của thiết kế dẻo cho vật liệu tiêu chuẩn Tsai-Wu

- + Trong nghiên cứu, thiết kế dẻo được xem xét với phần tử đại diện tấm phẳng hai chiều có bề dày không đổi. Vật liệu được xem như là ứng suất phẳng và chưa kể đến sự thay đổi của vật liệu theo bề dày tấm phẳng.
- + Hiện tượng tách lớp chưa được kể đến giữa các pha vật liệu khác nhau.

Chương 9

Kết luận và kiến nghị

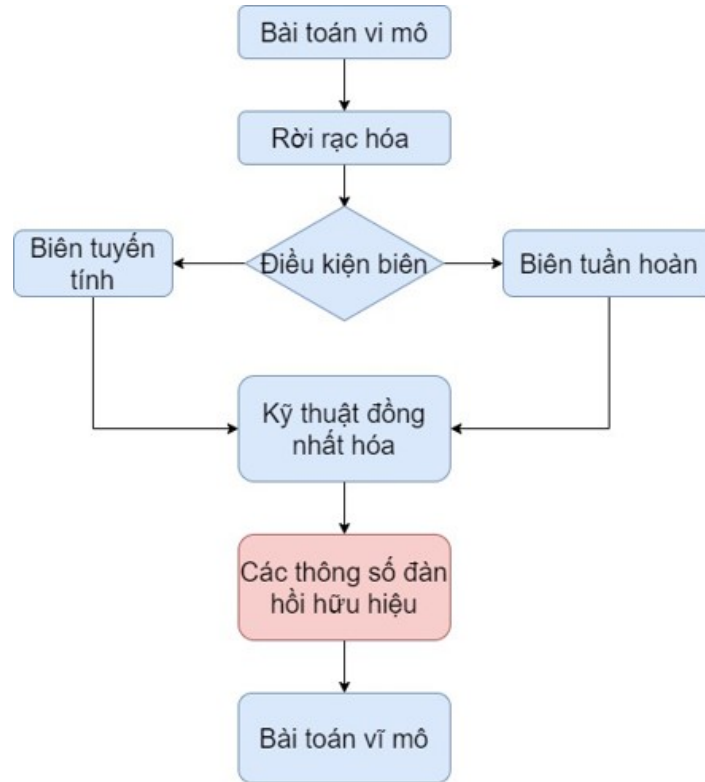
9.1 Kết luận

Luận án đã trình bày phương pháp đa tỉ lệ của vật liệu trong miền đàn hồi và ngoài miền đàn hồi. Đối với vật liệu trong miền đàn hồi, ba mẫu phần tử đại diện được xem xét là phần tử đại diện tấm phẳng, phần tử đại diện ba chiều và phần tử đại diện tấm chịu uốn. Các liên hệ giữa hai tỉ lệ vĩ mô và vi mô trong mỗi phần tử đại diện khác nhau được xây dựng thông qua điều kiện trung bình thể tích phần tử đại diện và điều kiện biên tuần hoàn. Các ví dụ số bao gồm vật liệu cốt sợi, vật liệu nhiều lớp, vật liệu có cơ lý biến thiên theo bề dày, vật liệu có lỗ rỗng hình tròn và vật liệu có lỗ rỗng hình chữ nhật. Qua đó, các thông số đàn hồi hữu hiệu của vật liệu không đồng nhất được xác định bằng kỹ thuật đồng nhất hóa. Các chương trình tính toán được lập trình bằng ngôn ngữ Matlab và kết quả của nó được so sánh tương đồng với các nghiên cứu của các tác giả khác. Đối với vật liệu ngoài miền đàn hồi, miền ứng suất giới hạn hay miền cường độ hữu hiệu của vật liệu không đồng nhất được xác định thông qua bài toán phân tích giới hạn cho kết cấu vi mô tuần hoàn. Bài toán này được xây dựng dưới dạng bài toán tối ưu hóa và mở rộng thêm ràng buộc trung bình biến dạng trên thể tích phần tử đại diện và điều kiện biên tuần hoàn. Kết quả của bài toán tối ưu này là một trường hợp cụ thể ứng suất giới hạn. Tổng hợp các trường hợp này sẽ giúp thu được miền cường độ hữu hiệu của vật liệu không đồng nhất. Phần tử tấm phẳng được xem xét trong bài toán này cùng với hai tiêu chuẩn dẻo tổng quát Hill và Tsai-Wu cho vật liệu không đồng nhất và bất đẳng hướng.

9.2 Kiến nghị

9.2.1 Phương pháp đa tỉ lệ cho bài toán đàn hồi

Sơ đồ giải thuật cho bài toán đa tỉ lệ đàn hồi được thể hiện như hình 9.1



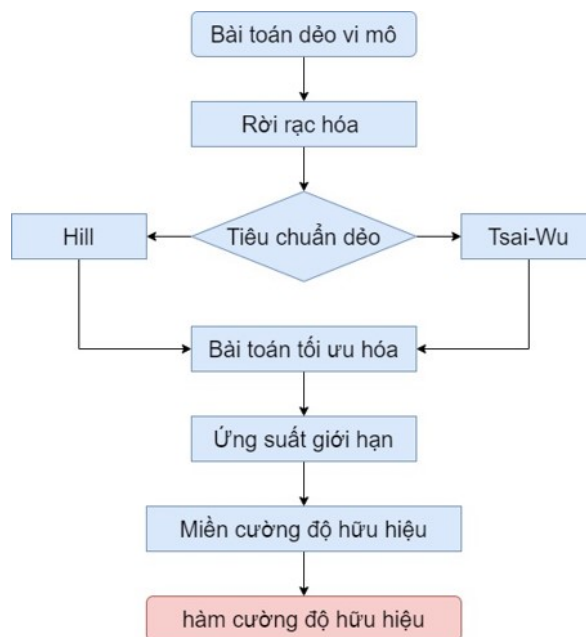
Hình 9.1: Sơ đồ giải thuật bài toán đa tỉ lệ trong miền đàn hồi.

- + Đối với điều kiện tọa độ các nút trên biên phải tuần hoàn. Các phương pháp số không phụ thuộc lưới (như là phần tử không lưới garlekin-EFG, phần tử đẳng hình học IGA, phần tử tỉ lệ biên SBEM,...) có thể áp dụng để cải thiện việc này. Ngoài ra, kỹ thuật tạo lưới voronoi đối xứng được đề xuất bởi hay kỹ thuật áp đặt điều kiện biên tuần hoàn cho hệ lưới bất đối xứng được đề xuất bởi Nguyen [137] hay điều kiện tuần hoàn dạng yếu bởi Larsson[138].
- + Nghiên cứu có thể mở rộng cho trường hợp biến dạng lớn. Mối liên hệ giữa biến dạng cấp độ vĩ mô và chuyển vị của cấp độ vi mô mà được thực hiện trong nghiên cứu này là bậc nhất. Điều này phù hợp với giả thiết trong cơ học là vật liệu có biến dạng bé. Để mở rộng nghiên cứu cho vật liệu có biến dạng lớn thì ta có thể thay mối liên hệ này thành bậc hai [139].

- + Sự liên kết giữa các pha vật liệu trong luận án được xem như tuyệt đối mà chưa kể đến hiện tượng tách lớp giữa các pha vật liệu này. Đây có thể mở rộng nghiên cứu khi kể đến hiện tượng này.
- + Nghiên cứu có thể chọn xấp xỉ trường chuyển vị biến thiên như nghiên cứu của Li và các cộng sự [48]. Qua đó, điều kiện biên tuần hoàn được thay đổi trong ràng buộc trên biên phần tử đại diện. Trung bình biến dạng của trường chuyển vị biến thiên sẽ bằng không để thỏa mãn điều kiện trung bình biến dạng của trường chuyển vị tổng bằng biến dạng hằng số tại một điểm vật liệu cấp độ vĩ mô.
- + Nghiên cứu có thể mở rộng cho phần tử đại diện cho kết cấu vỏ mỏng như [140].
- + Nghiên cứu có thể mở rộng cho bài toán phân tích sự truyền nhiệt như [141]

9.2.2 Phương pháp đa tỉ lệ cho bài toán thiết kế dẻo

Sơ đồ giải thuật của phương pháp đa tỉ lệ cho bài toán thiết kế dẻo được thể hiện như hình 9.2



Hình 9.2: Sơ đồ giải thuật bài toán đa tỉ lệ cho bài toán thiết kế dẻo.

- + Hàm tiêu chuẩn dẻo hữu hiệu trong luận văn là hàm trơn liên tục và bậc hai. Điều này chưa phù hợp đối với sự phát triển đa dạng về vật liệu mới ngày nay.

Nghiên cứu có thể mở rộng các dạng hàm dẻo khác để đáp ứng được sự phát triển trong ngành công nghệ vật liệu.

- + Bài toán phân tích giới hạn nhằm xác định ứng suất giới hạn của kết cấu vi mô. Trong hướng tiếp cận này, nguyên lý chính là sự cân bằng năng lượng giữa công ngoại lực và năng lượng tiêu tán dẻo (công nội năng) của kết cấu. Do vậy, hướng tiếp cận sẽ xác định trực tiếp trạng thái giới hạn của kết cấu mà không quan tâm đến quá trình phát triển của kết cấu. Một hướng tiếp cận khác mà có thể xác định ứng suất giới hạn của kết cấu vi mô là phương pháp lặp từng bước cho bài toán vi mô. Khi đó, vòng lặp được thực hiện trên cả hai cấp độ bài toán vi mô và bài toán vĩ mô.
- + Bài toán có thể mở rộng cho phân tích giới hạn cho kết cấu ba chiều và kết cấu tấm chịu uốn.

Danh mục bài báo

Danh mục các kết quả nghiên cứu trong tạp chí và hội thảo đã được công nhận trong quá trình thực hiện luận án:

Bài báo tạp chí quốc tế thuộc danh mục ISI

1. **P.H. Nguyen**, C.V. Le. "Yield design homogenization analysis of anisotropic materials with Tsai-Wu matrix". *International Journal of solids and structures*.. (đã nộp bản revised vào tháng 3 năm 2020)
2. C.V. Le, **P.H. Nguyen**, H. Askes, & C.D. Pham. "A computational homogenization approach for limit analysis of heterogeneous materials". *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 112(10), 1381-1401,2017.

Bài báo tạp chí trong nước

1. **P.H. Nguyen**, C.V. Le, & Phuc, H. L. H. "Kỹ thuật đồng nhất hóa cho vật liệu đa tinh thể dị hướng sử dụng phần tử biên tỉ lệ". *Tạp Chí Khoa Học Công Nghệ Xây Dựng (KHCNXD) - ĐHXD*, 2020.
2. **P.H. Nguyen**, C.V. Le, & K.T. Nguyen. "Xác định đặc trưng hữu hiệu của vật liệu đa tinh thể dị hướng bằng phương pháp đồng nhất hóa". *Tạp Chí Khoa Học Công Nghệ Xây Dựng (KHCNXD) - ĐHXD*, 13(4V), 129-138, 2019. [https://doi.org/10.31814/stce.nuce2019-13\(4V\)-12](https://doi.org/10.31814/stce.nuce2019-13(4V)-12).
3. **P.H. Nguyen**, C.V. Le, & K.T. Nguyen. "Tính toán đồng nhất kết cấu tấm cơ lý biến thiên (FGM) với phần tử đại diện 3D". *Kết cấu và công nghệ xây dựng*, 1859-3194, 2016.

Bài báo hội nghị quốc tế

1. **P.H. Nguyen**, C.V. Le, & Phuc, H. L. H. (2020, July). "Homogenization approach for representative laminate plate using Hsieh-Clough-Tocher element".

In THE 11TH INTERNATIONAL CONFERENCE ON COMPUTATIONAL METHODS (ICCM2020).

Bài báo hội nghị trong nước

1. **P.H. Nguyen**, C.V. Le, & K.T. Nguyen. "Kỹ thuật đồng nhất hoá kết cấu tấm chịu uốn". *In proceedings of Hội nghị Cơ Học Kỹ Thuật Toàn Quốc 2019*, Hà Nội, 9/4/2019. (April 2019).
2. **P.H. Nguyen**, C.V. Le, & K.T. Nguyen. "Xác định miền cường độ của vật liệu không đồng nhất sử dụng lý thuyết phân tích giới hạn và kỹ thuật đồng nhất hóa". *Hội nghị Cơ học toàn quốc lần thứ X*, Hà Nội, 8-9/12/2017. ISBN 978-604-82-2028-0. (December 2017).
3. **P.H. Nguyen**, C.V. Le, & K.T. Nguyen. "Tính toán đồng nhất hóa kết cấu tấm cơ lý biến thiên (FGM) với phần tử đại diện 3D". *Hội nghị những tiến bộ trong xây dựng và kiến trúc*, Tuy Hòa, 22-23/04/2016. (April 2016).
4. **P.H. Nguyen**, C.V. Le, & K.T. Nguyen. "Phương pháp đa tỉ lệ kết cấu tấm với phần tử thể tích đại diện 3D". *Hội nghị Cơ học kỹ thuật toàn quốc*, Đà Nẵng, 03-05/08/2015. (August 2015).

Tài liệu tham khảo

- [1] W. Voigt, “Ueber die beziehung zwischen den beiden elasticitatsconstanten isotroper kopper,” *Annalen der Physik*, vol. 274, no. 12, pp. 573–587, 1889.
- [2] A. Reuss, “Berechnung der fliessgrenze von mischkristallen auf grund der plastizitatsbedingung fur einkristalle.,” *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik*, vol. 9, no. 1, pp. 49–58, 1929.
- [3] S. Hashin, Z. và Shtrikman, “A variational approach to the theory of the elastic behaviour of polycrystals,” *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 10, no. 4, pp. 343–352, 1962.
- [4] A. Kolpakov, “Variational principles for stiffnesses of a non-homogeneous beam,” *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 46, pp. 1039–1053, jun 1998.
- [5] A. Kolpakov, “Variational principles for stiffnesses of a non-homogeneous plate,” *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 47, pp. 2075–2092, oct 1999.
- [6] H. Moulinec and P. Suquet, “A numerical method for computing the overall response of nonlinear composites with complex microstructure,” *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 157, no. 1-2, pp. 69–94, 1998.
- [7] S. Ghosh, K. Lee, and S. Moorthy, “Multiple scale analysis of heterogeneous elastic structures using homogenization theory and voronoi cell finite element method,” *International Journal of Solids and Structures*, vol. 32, no. 1, pp. 27–62, 1995.
- [8] F. Feyel and J. Chaboche, “Fe 2 multiscale approach for modelling the elastoviscoplastic behaviour of long fibre sic/ti composite materials,” *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 183, no. 3, pp. 309–330, 2000.
- [9] K. Washizu, *Variational methods in elasticity and plasticity*, vol. 3. Pergamon press Oxford, 1975.

- [10] K. Terada and N. Kikuchi, “A class of general algorithms for multi-scale analyses of heterogeneous media,” *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 190, no. 40, pp. 5427–5464, 2001.
- [11] P. D. Chinh, “Bounds for the effective elastic properties of completely random planar polycrystals,” *Journal of elasticity*, vol. 54, no. 3, pp. 229–251, 1999.
- [12] P. D. Chinh, “Bounds on the elastic moduli of completely random two-dimensional polycrystals,” *Meccanica*, vol. 37, no. 6, pp. 503–514, 2002.
- [13] P. Chinh, “Revised bounds on the elastic moduli of two-dimensional random polycrystals,” *Journal of Elasticity*, vol. 85, no. 1, pp. 1–20, 2006.
- [14] S. Nemat-Nasser and M. Hori, *Micromechanics: overall properties of heterogeneous materials*, vol. 37. Elsevier, 2013.
- [15] T. K. Nguyen, K. Sab, and G. Bonnet, “Bounds for the effective properties of heterogeneous plates,” *European Journal of Mechanics, A/Solids*, vol. 28, no. 6, pp. 1051–1063, 2009.
- [16] K. P. Walker, A. D. Freed, and E. H. Jordan, “Thermoviscoplastic analysis of fibrous periodic composites by the use of triangular subvolumes,” *Composites science and technology*, vol. 50, no. 1, pp. 71–84, 1994.
- [17] P. A. Fotiu and S. Nemat-Nasser, “Overall properties of elastic-viscoplastic periodic composites,” *International Journal of Plasticity*, vol. 12, no. 2, pp. 163–190, 1996.
- [18] H. Moulinec and P. Suquet, “Comparison of fft-based methods for computing the response of composites with highly contrasted mechanical properties,” *Physica B: Condensed Matter*, vol. 338, no. 1-4, pp. 58–60, 2003.
- [19] B. Bary, L. Gélébart, E. Adam, and C. Bourcier, “Numerical analysis of linear viscoelastic 3d concrete specimens: Comparison between fe and fft methods,” *Computational Modelling of Concrete Structures-Proceedings of EURO-C*, pp. 373–381, 2014.
- [20] F. Bernachy-Barbe and B. Bary, “Effect of aggregate shapes on local fields in 3d mesoscale simulations of the concrete creep behavior,” *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 156, pp. 13–23, 2019.

- [21] D. J. Eyre and G. W. Milton, “A fast numerical scheme for computing the response of composites using grid refinement,” *The European Physical Journal-Applied Physics*, vol. 6, no. 1, pp. 41–47, 1999.
- [22] J. Michel, H. Moulinec, and P. Suquet, “Effective properties of composite materials with periodic microstructure: a computational approach,” *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 172, no. 1-4, pp. 109–143, 1999.
- [23] Y. Cai, L. Xu, and G. Cheng, “Novel numerical implementation of asymptotic homogenization method for periodic plate structures,” *International Journal of Solids and Structures*, vol. 51, no. 1, pp. 284–292, 2014.
- [24] S. Ghosh and S. Mukhopadhyay, “A two-dimensional automatic mesh generator for finite element analysis for random composites,” *Computers & structures*, vol. 41, no. 2, pp. 245–256, 1991.
- [25] A. Gurson *et al.*, “Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth: Part i yield criteria and flow rules for porous ductile media,” *Journal of engineering materials and technology*, vol. 99, no. 1, pp. 2–15, 1977.
- [26] R. Smit, W. Brekelmans, and H. Meijer, “Prediction of the mechanical behavior of nonlinear heterogeneous systems by multi-level finite element modeling,” *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 155, no. 1-2, pp. 181–192, 1998.
- [27] F. Feyel, “A multilevel finite element method (fe^2) to describe the response of highly nonlinear structures using generalized continua,” *Computer Methods in applied Mechanics and engineering*, vol. 192, no. 28, pp. 3233–3244, 2003.
- [28] C. Miehe, J. Schotte, and M. Lambrecht, “Homogenization of inelastic solid materials at finite strains based on incremental minimization principles. application to the texture analysis of polycrystals,” *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 50, no. 10, pp. 2123–2167, 2002.
- [29] J. Renard and M. Marmonier, “Etude de l’initiation de l’endommagement dans la matrice d’un matériau composite par une méthode d’homogénéisation,” *La Recherche aérospatiale*, no. 6, pp. 43–51, 1987.
- [30] W. J. Meyer, *Concepts of mathematical modeling*. Courier Corporation, 2012.

- [31] T. I. Zohdi and P. Wriggers, “Computational micro-macro material testing,” *Archives of Computational Methods in Engineering*, vol. 8, no. 2, pp. 131–228, 2001.
- [32] E. Ladevz and J. Fish, “Preface to special issue on multiscale computational mechanics for materials and structure,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 192, pp. 28–0, 2003.
- [33] H. Ma, H. Chen, and B. Li, “Progress in concrete meso-mechanics research and comment on,” *Chinese Journal of Water Resources and Hydropower Research*, 2004.
- [34] H. Ma, H. Chen, J. Wu, and B. Li, “Study on numerical algorithm of 3d meso-mechanics model of dam concrete,” *Chinese J. of Computational Mechanics*, vol. 25, no. 2, pp. 244–247, 2008.
- [35] T. Sadowski, *Multiscale modelling of damage and fracture processes in composite materials*, vol. 474. Springer Science & Business Media, 2007.
- [36] Y. Li, J. Zheng, J. Cui, and S. Long, “Iterative multi-scale finite element predicting method for the elasticity mechanical parameters of the concrete with multi-graded rocks,” *Chinese Journal of Computational Mechanics*, vol. 27, no. 1, pp. 115–119, 2010.
- [37] U. Galvanetto and M. Aliabadi, *Multiscale modeling in solid mechanics: computational approaches*, vol. 3. World Scientific, 2010.
- [38] P. G. Hodge, “Plastic analysis of structures,” p. 378, 1959.
- [39] M. A. Save, C. E. Massonnet, and C. Massonnet, *Plastic analysis and design of plates, shells and disks*, vol. 15. North-Holland, 1972.
- [40] M. Zyczkowski, *Combined loadings in the theory of plasticity*. Springer Science & Business Media, 1981.
- [41] A. Sawczuk, “Mechanics and plasticity of structures.,” *Ellis Horwood Limited*, p. 203, 1989.
- [42] D. Liu and C. Jiang, “Plastic limit analysis of circular plates based on twin-shear unified strength theory,” *Engineering Mechanics*, vol. 25, no. 8, pp. 77–84, 2008.
- [43] M. Yu, “Twin shear stress yield criterion,” *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 25, no. 1, pp. 71–74, 1983.

- [44] M. Yu and W. Zeng, “Mesomechanical simulation of failure criterion for a composite material,” 1993.
- [45] D. Bigoni and A. Piccolroaz, “Yield criteria for quasibrittle and frictional materials,” *International journal of solids and structures*, vol. 41, no. 11-12, pp. 2855–2878, 2004.
- [46] V. A. Kolupaev, *Equivalent Stress Concept for Limit State Analysis*. Springer, 2018.
- [47] H. Li, Y. Liu, X. Feng, and Z. Cen, “Limit analysis of ductile composites based on homogenization theory,” in *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 459, pp. 659–675, The Royal Society, 2003.
- [48] H. Li and H. Yu, “Limit analysis of composite materials based on an ellipsoid yield criterion,” *International journal of plasticity*, vol. 22, no. 10, pp. 1962–1987, 2006.
- [49] H. Li, “Limit analysis of composite materials with anisotropic microstructures: a homogenization approach,” *Mechanics of Materials*, vol. 43, no. 10, pp. 574–585, 2011.
- [50] H. Li, “Microscopic limit analysis of cohesive-frictional composites with non-associated plastic flow,” *European Journal of Mechanics-A Solids*, vol. 37, pp. 281–293, 2013.
- [51] G. Milani, P. B. Lourenço, and A. Tralli, “Homogenised limit analysis of masonry walls, part i: Failure surfaces,” *Computers & structures*, vol. 84, no. 3-4, pp. 166–180, 2006.
- [52] G. Milani, P. B. Lourenço, and A. Tralli, “Homogenised limit analysis of masonry walls, part ii: Structural examples,” *Computers & structures*, vol. 84, no. 3-4, pp. 181–195, 2006.
- [53] G. Milani, P. Lourenço, and A. Tralli, “3d homogenized limit analysis of masonry buildings under horizontal loads,” *Engineering Structures*, vol. 29, no. 11, pp. 3134–3148, 2007.
- [54] M. Gueguin, G. Hassen, and P. De Buhan, “Numerical assessment of the macroscopic strength criterion of reinforced soils using semidefinite programming,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 99, no. 7, pp. 522–541, 2014.
- [55] C. A. Schuh and A. C. Lund, “Atomistic basis for the plastic yield criterion of metallic glass,” *Nature materials*, vol. 2, no. 7, p. 449, 2003.
- [56] A. Lund and C. Schuh, “Mechanical properties: Strengthening mechanisms in metals,” 2005.

- [57] V. Kouznetsova, W. Brekelmans, and F. Baaijens, “An approach to micro-macro modeling of heterogeneous materials,” *Computational Mechanics*, vol. 27, no. 1, pp. 37–48, 2001.
- [58] A. Molina, E. de Souza Neto, and D. Peric, “Homogenized tangent moduli for heterogeneous materials,” in *Proceedings of the 13th UK National Conference of the Association of Computational Mechanics in Engineering*, pp. 17–20, Citeseer, 2005.
- [59] D. Perić, E. de Souza Neto, R. Feijóo, M. Partovi, and A. Molina, “On micro-to-macro transitions for multi-scale analysis of non-linear heterogeneous materials: unified variational basis and finite element implementation,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 87, no. 1-5, pp. 149–170, 2011.
- [60] J. Fish, N. Fares, and A. Nath, “Micromechanical elastic cracktip stresses in a fibrous composite,” *International journal of fracture*, vol. 60, no. 2, pp. 135–146, 1993.
- [61] N. Ramakrishnan and V. Arunachalam, “Effective elastic moduli of porous solids,” *Journal of materials science*, vol. 25, no. 9, pp. 3930–3937, 1990.
- [62] R. Spriggs, “Expression for effect of porosity on elastic modulus of polycrystalline refractory materials, particularly aluminum oxide,” *Journal of the American Ceramic Society*, vol. 44, no. 12, pp. 628–629, 1961.
- [63] G. Tandon and G. Weng, “The effect of aspect ratio of inclusions on the elastic properties of unidirectionally aligned composites,” *Polymer composites*, vol. 5, no. 4, pp. 327–333, 1984.
- [64] F. Fritzen, T. Böhlke, and E. Schnack, “Periodic three-dimensional mesh generation for crystalline aggregates based on Voronoi tessellations,” *Computational Mechanics*, vol. 43, no. 5, pp. 701–713, 2009.
- [65] T. Luther and C. Könke, “Polycrystal models for the analysis of intergranular crack growth in metallic materials,” *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 76, pp. 2332–2343, oct 2009.
- [66] R. Quey, P. R. Dawson, and F. Barbe, “Large-scale 3D random polycrystals for the finite element method: Generation, meshing and remeshing,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 200, pp. 1729–1745, apr 2011.

- [67] K. Zhang, M. Wu, and R. Feng, “Simulation of microplasticity-induced deformation in uniaxially strained ceramics by 3-d voronoi polycrystal modeling,” *International journal of plasticity*, vol. 21, no. 4, pp. 801–834, 2005.
- [68] M. Coster, X. Arnould, J.-L. Chermant, A. El Moataz, and T. Chartier, “A microstructural model by space tessellation for a sintered ceramic: cerine,” *Image Analysis & Stereology*, vol. 24, no. 2, pp. 105–116, 2005.
- [69] E. Ghazvinian, M. Diederichs, and R. Quey, “3d random voronoi grain-based models for simulation of brittle rock damage and fabric-guided micro-fracturing,” *Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering*, vol. 6, no. 6, pp. 506–521, 2014.
- [70] “Numerical simulation of microstructure of brittle rock using a grain-breakable distinct element grain-based model,” *Computers and Geotechnics*, vol. 78, pp. 203–217, sep 2016.
- [71] S. Norouzi, A. Baghbanan, and A. Khani, “Investigation of grain size effects on micro/macro-mechanical properties of intact rock using voronoi element—discrete element method approach,” *Particulate Science and Technology*, vol. 31, no. 5, pp. 507–514, 2013.
- [72] R. Lebensohn, M. Montagnat, P. Mansuy, P. Duval, J. Meysonnier, and A. Philip, “Modeling viscoplastic behavior and heterogeneous intracrystalline deformation of columnar ice polycrystals,” *Acta Materialia*, vol. 57, pp. 1405–1415, mar 2009.
- [73] M. Montagnat, O. Castelnau, P. Bons, S. Faria, O. Gagliardini, F. Gillet-Chaulet, F. Grennerat, A. Griera, R. Lebensohn, H. Moulinec, J. Roessiger, and P. Suquet, “Multiscale modeling of ice deformation behavior,” *Journal of Structural Geology*, vol. 61, pp. 78–108, apr 2014.
- [74] C. Soyarslan, M. Pradas, and S. Bargmann, “Effective elastic properties of 3d stochastic bicontinuous composites,” *Mechanics of Materials*, vol. 137, p. 103098, 2019.
- [75] J.-H. Lee, L. Wang, M. C. Boyce, and E. L. Thomas, “Periodic bicontinuous composites for high specific energy absorption,” *Nano letters*, vol. 12, no. 8, pp. 4392–4396, 2012.
- [76] A. P. Roberts and E. J. Garboczi, “Elastic moduli of model random three-dimensional closed-cell cellular solids,” *Acta materialia*, vol. 49, no. 2, pp. 189–197, 2001.
- [77] K. Sab and A. Lebée, *Homogenization of Heterogeneous Thin and Thick Plates*. John Wiley & Sons, 2014.

- [78] C. Helfen and S. Diebels, “Numerical multiscale modelling of sandwich plates,” *Technische Mechanik*, vol. 32, no. 2, pp. 251–264, 2012.
- [79] Z. L. Zhang, C. Chang, G. Liu, Q. Li, *et al.*, “Homogenization for composite material properties using smoothed finite element method,” in *Proceedings of the 5th International Conference on Computational Methods: 5th ICCM2014, 28th-30th July 2014, Cambridge, UK*, pp. 429–468, 2014.
- [80] P. Chou, J. Carleone, and C. Hsu, “Elastic constants of layered media,” *Journal of composite materials*, vol. 6, no. 1, pp. 80–93, 1972.
- [81] A. Alexander and J. Tzeng, “Three dimensional effective properties of composite materials for finite element applications,” *Journal of composite materials*, vol. 31, no. 5, pp. 466–485, 1997.
- [82] G. Duvaut and A. M. Metellus, “Homogénéisation d’une plaque mince en flexion périodique et symétrique,” *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences Paris - A*, vol. 283, pp. 947–950, 1976.
- [83] D. Caillerie and J. C. Nedelec, “Thin elastic and periodic plates,” *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, vol. 6, no. 1, pp. 159–191, 1984.
- [84] R. V. Kohn and M. Vogelius, “A new model for thin plates with rapidly varying thickness,” *International Journal of Solids and Structures*, vol. 20, no. 4, pp. 333–350, 1984.
- [85] T. Lewiński and J. J. Telega, *Plates, laminates, and shells: asymptotic analysis and homogenization*, vol. 52. World Scientific, 1999.
- [86] A. Kolpakov and I. Sheremet, “The stiffnesses of non-homogeneous plates,” *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, vol. 63, pp. 633–640, jan 1999.
- [87] T.-K. Nguyen, K. Sab, and G. Bonnet, “Green’s operator for a periodic medium with traction-free boundary conditions and computation of the effective properties of thin plates,” *International Journal of Solids and Structures*, vol. 45, pp. 6518–6534, dec 2008.
- [88] C. E. Helfen and S. Diebels, “Numerical multi-scale modelling of composite plates,” 2012.
- [89] G. Lu, G. M. Lu, and Z. Xiao, “Mechanical properties of porous materials,” *Journal of Porous Materials*, vol. 6, no. 4, pp. 359–368, 1999.

- [90] A. Roberts and E. Garboczi, “Elastic properties of model porous ceramics,” *Journal of the American Ceramic Society*, vol. 83, no. 12, pp. 3041–3048, 2000.
- [91] J. N. Reddy, *Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis*. CRC press, 2003.
- [92] H. Phan-Dao, H. Nguyen-Xuan, C. Thai-Hoang, T. Nguyen-Thoi, and T. Rabczuk, “An edge-based smoothed finite element method for analysis of laminated composite plates,” *International Journal of Computational Methods*, vol. 10, no. 01, p. 1340005, 2013.
- [93] J. Salençon, *Yield design*. John Wiley & Sons, 2013.
- [94] P. De Buhan and A. Taliercio, “A homogenization approach to the yield strength of composite materials,” *European Journal of Mechanics. A, Solids*, vol. 10, no. 2, pp. 129–154, 1991.
- [95] A. Taliercio, “Lower and upper bounds to the macroscopic strength domain of a fiber-reinforced composite material,” *International journal of plasticity*, vol. 8, no. 6, pp. 741–762, 1992.
- [96] A. Taliercio and P. Sagramoso, “Uniaxial strength of polymeric-matrix fibrous composites predicted through a homogenization approach,” *International Journal of Solids and Structures*, vol. 32, no. 14, pp. 2095–2123, 1995.
- [97] P. Francescato and J. Pastor, “Lower and upper numerical bounds to the off-axis strength of unidirectional fiber-reinforced composites by limit analysis methods,” *European journal of mechanics. A. Solids*, vol. 16, no. 2, pp. 213–234, 1997.
- [98] P. Francescato, J. Pastor, *et al.*, “Limit analysis of unidirectional porous media,” *Mechanics research communications*, vol. 25, no. 5, pp. 535–542, 1998.
- [99] M. Trillat and J. Pastor, “Limit analysis and gurson’s model,” *European Journal of Mechanics-A/Solids*, vol. 24, no. 5, pp. 800–819, 2005.
- [100] B. Jellali, M. Bouassida, and P. De Buhan, “A homogenization method for estimating the bearing capacity of soils reinforced by columns,” *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, vol. 29, no. 10, pp. 989–1004, 2005.
- [101] B. Jellali, M. Bouassida, and P. De Buhan, “Stability analysis of an embankment resting upon a column-reinforced soil,” *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, vol. 35, no. 11, pp. 1243–1256, 2011.

- [102] G. Hassen, M. Gueguin, and P. De Buhan, “A homogenization approach for assessing the yield strength properties of stone column reinforced soils,” *European Journal of Mechanics-A/Solids*, vol. 37, pp. 266–280, 2013.
- [103] M. Gueguin, G. Hassen, and P. De Buhan, “Stability analysis of homogenized stone column reinforced foundations using a numerical yield design approach,” *Computers and Geotechnics*, vol. 64, pp. 10–19, 2015.
- [104] J. Dallot and K. Sab, “Limit analysis of multi-layered plates. part i: the homogenized love–kirchhoff model,” *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 56, no. 2, pp. 561–580, 2008.
- [105] J. Dallot and K. Sab, “Limit analysis of multi-layered plates. part ii: Shear effects,” *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 56, no. 2, pp. 581–612, 2008.
- [106] J. Bleyer and P. De Buhan, “A computational homogenization approach for the yield design of periodic thin plates. part i: Construction of the macroscopic strength criterion,” *International Journal of Solids and Structures*, vol. 51, no. 13, pp. 2448–2459, 2014.
- [107] J. Bleyer and P. De Buhan, “A computational homogenization approach for the yield design of periodic thin plates. part ii: Upper bound yield design calculation of the homogenized structure,” *International Journal of Solids and Structures*, vol. 51, no. 13, pp. 2460–2469, 2014.
- [108] E. Anderheggen and H. Knöpfel, “Finite element limit analysis using linear programming,” *International Journal of Solids and Structures*, vol. 8, no. 12, pp. 1413–1431, 1972.
- [109] S. Sloan, “Lower bound limit analysis using finite elements and linear programming,” *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, vol. 12, no. 1, pp. 61–77, 1988.
- [110] E. Christiansen and K. Kortanek, “Computation of the collapse state in limit analysis using the lp primal affine scaling algorithm,” *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 34, no. 1, pp. 47–63, 1991.
- [111] H. Huh and W. H. Yang, “A general algorithm for limit solutions of plane stress problems,” 1991.

- [112] N. Zouain, J. Herskovits, L. A. Borges, and R. A. Feijóo, “An iterative algorithm for limit analysis with nonlinear yield functions,” *International Journal of Solids and Structures*, vol. 30, no. 10, pp. 1397–1417, 1993.
- [113] G.-L. Jiang, “Non-linear finite element formulation of kinematic limit analysis,” *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 38, no. 16, pp. 2775–2807, 1995.
- [114] Y. Liu, Z. Cen, and B. Xu, “A numerical method for plastic limit analysis of 3-d structures,” *International Journal of Solids and Structures*, vol. 32, no. 12, pp. 1645–1658, 1995.
- [115] A. Chaaba, L. Bousshine, and G. De Saxce, “Kinematic limit analysis modelling by a regularization approach and finite element method,” *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 57, no. 13, pp. 1899–1922, 2003.
- [116] J.-W. Simon and D. Weichert, “Numerical lower bound shakedown analysis of engineering structures,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 200, no. 41-44, pp. 2828–2839, 2011.
- [117] C. V. Le, M. Gilbert, and H. Askes, “Limit analysis of plates and slabs using a meshless equilibrium formulation,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 83, no. 13, pp. 1739–1758, 2010.
- [118] C. V. Le, H. Askes, and M. Gilbert, “Adaptive element-free galerkin method applied to the limit analysis of plates,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 199, no. 37-40, pp. 2487–2496, 2010.
- [119] C. V. Le, “A stabilized discrete shear gap finite element for adaptive limit analysis of mindlin–reissner plates,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 96, no. 4, pp. 231–246, 2013.
- [120] T. Tran, C. Le, D. Pham, and H. Nguyen-Xuan, “Shakedown reduced kinematic formulation, separated collapse modes, and numerical implementation,” *International Journal of Solids and Structures*, vol. 51, no. 15-16, pp. 2893–2899, 2014.
- [121] H. Nguyen-Xuan, L. V. Tran, C. H. Thai, and C. V. Le, “Plastic collapse analysis of cracked structures using extended isogeometric elements and second-order cone programming,” *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, vol. 72, pp. 13–27, 2014.

- [122] J. Bleyer, C. Van Le, and P. De Buhan, “Locking-free discontinuous finite elements for the upper bound yield design of thick plates,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 103, no. 12, pp. 894–913, 2015.
- [123] D. Weichert, A. Hachemi, and F. Schwabe, “Shakedown analysis of composites,” *Mech. Res. Commun.*, vol. 26, pp. 309–18, 1999.
- [124] I. Gitman, H. Askes, and L. Sluys, “Representative volume: existence and size determination,” *Engineering fracture mechanics*, vol. 74, no. 16, pp. 2518–2534, 2007.
- [125] H. Zhang, Y. Liu, and B. Xu, “Plastic limit analysis of ductile composite structures from micro-to macro-mechanical analysis,” *Acta Mechanica Solida Sinica*, vol. 22, no. 1, pp. 73–84, 2009.
- [126] A. Litewka, “Simulation of oriented continuous damage evolution,” *Journal de Mecanique Theorique.*, vol. 3, pp. 675–688, 1984.
- [127] P. Suquet, “Elements of homogenization for inelastic solid mechanics,” *Homogenization Techniques for Composite Media*, 1987.
- [128] V. Carvelli, G. Maier, and A. Taliercio, “Kinematic limit analysis of periodic heterogeneous media,” *CMES(Computer Modelling in Engineering & Sciences)*, vol. 1, no. 2, pp. 19–30, 2000.
- [129] H. Magoaric, S. Bourgeois, and O. Débordes, “Elastic plastic shakedown of 3d periodic heterogeneous media: a direct numerical approach,” *International Journal of Plasticity*, vol. 20, no. 8-9, pp. 1655–1675, 2004.
- [130] A. Hachemi, M. Chen, G. Chen, and D. Weichert, “Limit state of structures made of heterogeneous materials,” *International Journal of Plasticity*, vol. 63, pp. 124–137, 2014.
- [131] P. De Buhan, J. Bleyer, and G. Hassen, *Elastic, Plastic and Yield Design of Reinforced Structures*. Elsevier, 2017.
- [132] M. Chen, A. Hachemi, and D. Weichert, “Shakedown and optimization analysis of periodic composites,” in *Limit State of Materials and Structures*, pp. 45–69, Springer, 2013.
- [133] A. Mosek, “The mosek optimization toolbox for matlab manual,” 2015.
- [134] O. Richmond and R. Smelser, “Alcoa technical center report,” 1985.

- [135] P. P. Castañeda, “The effective mechanical properties of nonlinear isotropic composites,” *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 39, no. 1, pp. 45–71, 1991.
- [136] M. Găărăjeu and P. Suquet, “Effective properties of porous ideally plastic or viscoplastic materials containing rigid particles,” *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 45, no. 6, pp. 873–902, 1997.
- [137] V.-D. Nguyen, E. Béchet, C. Geuzaine, and L. Noels, “Imposing periodic boundary condition on arbitrary meshes by polynomial interpolation,” *Computational Materials Science*, vol. 55, pp. 390–406, 2012.
- [138] F. Larsson, K. Runesson, S. Saroukhani, and R. Vafadari, “Computational homogenization based on a weak format of micro-periodicity for rve-problems,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 200, no. 1-4, pp. 11–26, 2011.
- [139] L. Kaczmarczyk, C. J. Pearce, and N. Bićanić, “Scale transition and enforcement of rve boundary conditions in second-order computational homogenization,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 74, no. 3, pp. 506–522, 2008.
- [140] M. G. Geers, E. W. Coenen, and V. G. Kouznetsova, “Multi-scale computational homogenization of structured thin sheets,” *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, vol. 15, no. 4, p. S393, 2007.
- [141] E. Monteiro, J. Yvonnet, and Q.-C. He, “Computational homogenization for nonlinear conduction in heterogeneous materials using model reduction,” *Computational Materials Science*, vol. 42, no. 4, pp. 704–712, 2008.